Matemática

Iniciación al Álgebra

El presente material fue elaborado por los Equipos Técnicos de la Dirección de Educación de Adultos y Formación Profesional de la
Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires.

El **Ministerio de Trabajo, Empleo y Seguridad Social** brindó apoyo financiero para la elaboración de este material en el marco del Convenio Más y Mejor Trabajo celebrado con el Gobierno de la Provincia de Buenos Aires.

EQUIPO DE PRODUCCIÓN PEDAGÓGICA

COORDINACIÓN GENERAL
Gerardo Bacalini

COORDINACIÓN DEL PROYECTO
Marta Ester Fierro

COORDINACIÓN DE PRODUCCIÓN DE MATERIALES:
Beatriz Alen

AUTOR
María Guillermina Meana

PROCESAMIENTO DIDÁCTICO
Alicia Santana

ASISTENCIA DE PRODUCCIÓN
Florencia Sgandurra

CORRECCIÓN DE ESTILO
Carmen Gargiulo

GESTIÓN
Claudia Schadlein
Marta Manese
Cecilia Chavez
María Teresa Lozada
Juan Carlos Manoukian

Se agradece la colaboración de los docentes y directivos de los Centros Educativos de Nivel Secundario de la provincia de Buenos Aires que revisaron y realizaron aportes a las versiones preliminares de los materiales.

Indice

:::.. Introducción

El lenguaje matemático constituye una de las formas de comunicación, expresión y comprensión más poderosas que ha inventado el hombre. El lenguaje matemático comprende: el lenguaje coloquial, el aritmético, el geométrico y el algebraico o simbólico. Usted ya ha trabajado con algunos de estos lenguajes en algunos módulos anteriores y en la vida cotidiana. En éste le proponemos profundizar el trabajo con lenguaje algebraico, lo que le permitirá abordar la resolución de una serie de problemas para los cuales los otros lenguajes resultan insuficientes o de difícil aplicación.

Para ello le proponemos una serie de problemas para que usted resuelva primero con los conocimientos que ya tiene y luego nosotros le formularemos otras formas de resolución que irán ampliando sus posibilidades y le brindarán nuevas herramientas de trabajo. También le planteamos una serie de actividades para que tenga ocasión de aplicar estas nuevas estrategias a otras situaciones.

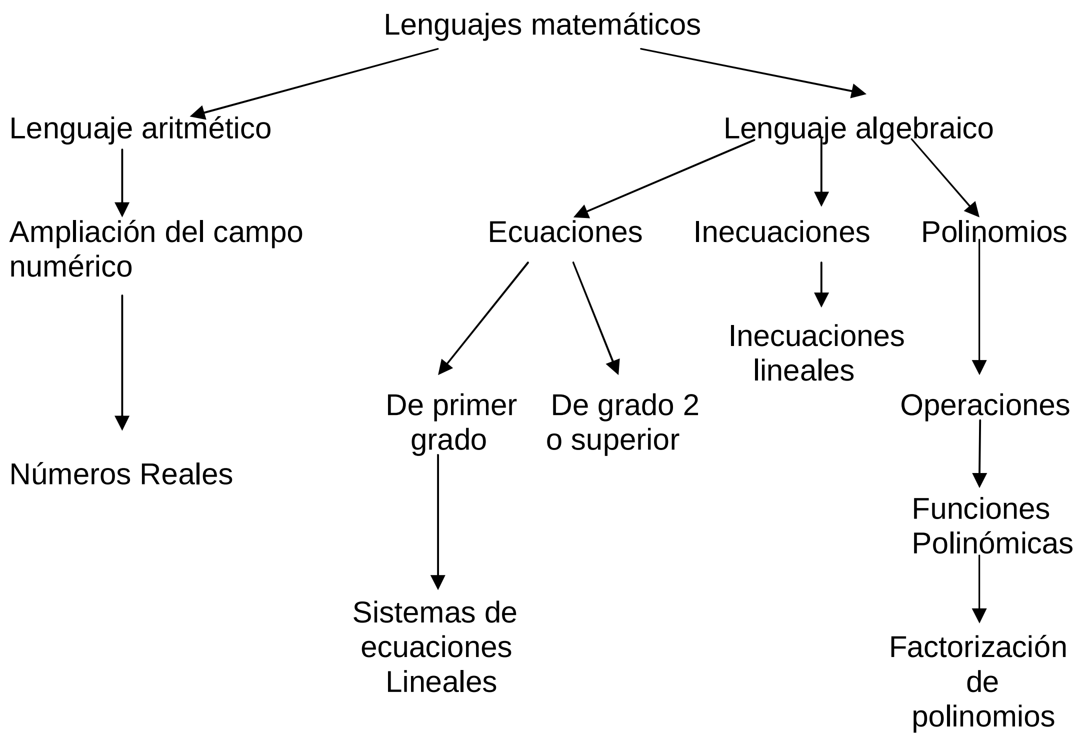
No olvide que se aprende matemática resolviendo problemas. Resolver problemas es una actividad que en un comienzo puede no ser sencilla, requiere esfuerzo y perseverancia. No se desaliente si en algunos casos le resultan difíciles. A medida que vaya avanzando irá ganando experiencia y confianza.

:::.. Objetivos

Esperamos que una vez que haya realizado la experiencia propuesta en este módulo usted logre:

- ✓ Identificar aquellas situaciones donde el álgebra aparece como una herramienta más potente que la aritmética.
- ✓ Demostrar propiedades matemáticas utilizando el lenguaje algebraico.
- ✓ Utilizar el álgebra para realizar generalizaciones.
- ✓ Resolver problemas mediante el planteo y resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
- ✓ Relacionar los conceptos de función y polinomio.
- ✓ Resolver algebraicamente problemas que respondan a un modelo de funciones lineales y cuadráticas.

:::.. Esquema de contenidos



Unidad 1: Lenguajes matemáticos

:::.. Introducción

Así como en nuestra vida cotidiana utilizamos distintos medios para comunicarnos: el lenguaje hablado y escrito, en sus diferentes idiomas, el lenguaje simbólico y el lenguaje de los códigos, también en matemática se utilizan distintos lenguajes.
Acerca de los distintos lenguajes matemáticos, su importancia y sus diferentes usos usted puede encontrar información en el Libro 5. También se trabajó con lenguaje simbólico en los Libros 3 y 4. Si usted no tiene estos libros puede solicitárselos a su tutor. En el Módulo 1 hemos utilizado el lenguaje gráfico y simbólico para trabajar con funciones. En este módulo profundizaremos el trabajo con lenguaje simbólico o algebraico. Veremos cómo el lenguaje algebraico es una herramienta útil para resolver problemas y cómo puede utilizarse para demostrar propiedades matemáticas y hacer generalizaciones.

Recordemos algunos de los lenguajes utilizados en matemática:

El **lenguaje coloquial**, formado por las palabras que utilizamos para conversar. Por ejemplo:

_ " El triple de un número es igual a diez"
_ " L a edad de Juan supera en dos años a la de Pablo"
_" El costo de vida ha aumentado un 2%"

El **lenguaje simbólico o algebraico**, formado por los símbolos específicos de la matemática. Las expresiones anteriores traducidas al lenguaje simbólico serían:

_" $3\,n = 10$"
_ " $J = P + 2$"
_ " $C = c+ 0{,}02\,c$"

El **lenguaje gráfico**, utilizado para brindar mucha información en poco espacio. Por ejemplo:

_ "gráficos circulares"
_ "gráficos de barras"
_"representaciones en ejes cartesianos"

:::.. Ampliación del campo numérico

Antes de comenzar a trabajar con diferentes lenguajes matemáticos haremos una breve revisión de los diferentes conjuntos numéricos.
En los libros y módulos anteriores usted ya trabajó con distintos tipos de números y estudió sus propiedades. En este módulo trabajaremos con

diferentes conjuntos numéricos, realizando operaciones y utilizando sus propiedades.

Si lo considera necesario puede consultar el Libro 3 de EGB, página 33 y subsiguientes. Si no lo tiene puede solicitárselo a su tutor. Allí encontrará más ejemplos y un detalle de las propiedades de cada conjunto numérico.

Veamos ahora, a modo de revisión, cuáles son esos conjuntos numéricos y cuáles sus usos más frecuentes.

Los primeros números con los que usted ha trabajado son los que se utilizan para contar:

1, 2, 3, 4, ...

Se los llama **números naturales** o **enteros positivos**. Al conjunto de tales números se lo designa con la letra **N**.

ACTIVIDAD 1

¿En qué situaciones de la vida cotidiana utiliza usted los números naturales? Escriba algunos ejemplos.

¿Qué operaciones puede realizar con números naturales de forma tal que el resultado sea siempre un número natural? Anote algunos ejemplos.

¿Qué operaciones con números naturales no siempre dan un número natural?

Escriba algunos ejemplos.

Encontrará otros ejemplos en las claves de corrección que figuran al final del módulo.

Vemos que ciertas operaciones entre números naturales no siempre dan como resultado otro número natural. Por ejemplo si restamos 5 – 8 el resultado no es un número natural. Es necesario entonces recurrir a otro conjunto más amplio, el de los números negativos.

Los números –1, -2, -3, -4, ..., se llaman **enteros negativos**. El número 0 no es positivo ni negativo. Los enteros positivos, los enteros negativos y el cero forman el conjunto de los **números enteros**; a este conjunto se lo designa con la letra **Z** (del alemán *Zahl*, que significa número).

ACTIVIDAD 2

a. ¿En qué situaciones de la vida cotidiana utiliza usted los números negativos? Escriba algunos ejemplos.

b. ¿Qué operaciones puede realizar con números enteros de forma tal que el resultado sea siempre un número entero? Anote algunos ejemplos.

c. ¿Qué operaciones con números enteros no siempre dan un número entero? No olvide tener en cuenta la potenciación y radicación.

Escriba algunos ejemplos.

Encontrará otros ejemplos en las claves de corrección que figuran al final del módulo.

Vemos que también hay operaciones entre números enteros que no siempre dan un número entero. Por ejemplo si dividimos 1 : 2 el resultado no es un número entero. Es necesario entonces recurrir a otro conjunto más amplio aún, el de los **números racionales**.
En este conjunto se encuentran todos aquellos números que pueden expresarse como una fracción, es decir como un cociente entre números enteros $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros, y n es distinto de cero. Al conjunto de tales números se lo designa con la letra **Q** (del inglés *Quotient*, que significa cociente). Dentro del conjunto de los números racionales se encuentran también los números enteros pues pueden escribirse como una fracción de denominador 1. Sin embargo, por una cuestión de comodidad, el denominador 1 no se escribe.

Algunos ejemplos de números racionales son: $\frac{1}{2}$; $-\frac{13}{9}$; $\frac{61}{137}$; 2; - 3; 0 ; 5/4; 3/8

Los números racionales pueden expresarse también como decimales.

¿Recuerda usted cómo encontrar la expresión decimal de una fracción?

Una forma es realizar la división entre numerador y denominador de la fracción.

ACTIVIDAD 3

Escriba las expresiones decimales de los ejemplos anteriores.

Habrá notado que algunas de las expresiones decimales anteriores tienen una cantidad finita de cifras decimales y otras, en cambio, tienen una cantidad infinita de cifras decimales pero que en algún momento comienzan a repetirse siguiendo un orden. A estos últimos los llamamos números periódicos.

ACTIVIDAD 4

a. ¿En qué situaciones de la vida cotidiana utiliza los números racionales que no son enteros? Escriba algunos ejemplos.

b. ¿Qué operaciones puede realizar con números racionales de forma tal que el resultado sea siempre un número racional? Anote algunos ejemplos.

c. ¿Qué operaciones con números racionales no siempre dan un número racional? Escriba algunos ejemplos.

Encontrará otros ejemplos en las claves de corrección que figuran al final del módulo.

Existen otros números que no pueden expresarse como fracción. Son aquellos que tienen infinitas cifras decimales que no se repiten en ningún orden.

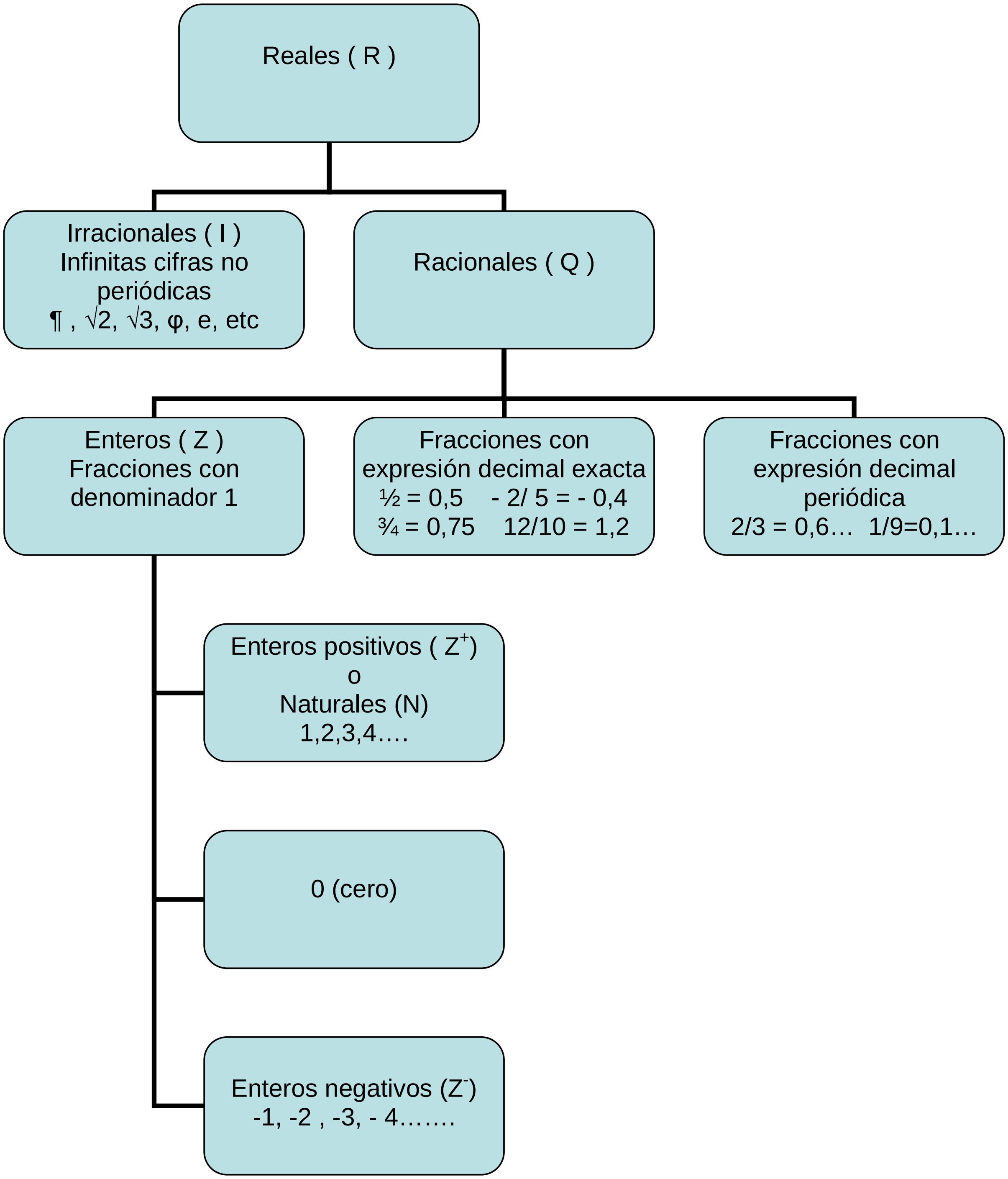
Estos números forman parte del conjunto de los **números irracionales**.
Algunos ejemplos de números irracionales son el número $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ o el número $\pi = 3{,}141592654...$ y otros que podemos inventar como 0,12233… ó 0,24681012…..
Cree usted algún otro. Escríbalo y consulte luego con su tutor.

ACTIVIDAD 5

Escriba algunas situaciones en las que se usen los números irracionales.

Los números racionales y los números irracionales forman un nuevo conjunto, llamado conjunto de los **números reales**, y al que se designa con la letra **R**.

Podemos resumir la información anterior en el siguiente cuadro:



Ahora comenzaremos a trabajar con diferentes lenguajes matemáticos. Tenga presente que al resolver problemas es muy importante tener en cuenta con qué conjunto numérico se está trabajando para poder dar la respuesta adecuada.

Problema 1

Pedro, Juan y Luis son hermanos. Tienen entre los tres ahorrados $63. Juan tiene un peso más que Pedro y uno menos que Luis. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado cada uno?

:|Antes de proseguir con la lectura intente resolver el problema.
:| Ahora compare su resolución con las que le proponemos a continuación.

Una posible resolución sería:

Si todos tuvieran ahorrada la misma cantidad podríamos dividir 63 entre 3 y obtendríamos 21. Pero como Juan tiene un peso más que Pedro y uno menos que Luis, Pedro tiene 20 y Luis 22.
Más adelante veremos otras formas de resolución.

Problema 2

Marcela, María y Marta son hermanas. Tienen ahorrado entre las tres $102. María tiene $15 menos que Marcela y $ 12 más que Marta. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado cada una?

:| Intente resolverlo y luego compare su resolución con la que proponemos a continuación. Más adelante veremos otras formas de resolución**.**

Para resolver este problema podemos comenzar como en el caso anterior. Dividimos $102 entre 3. Obtenemos $34. Supongamos que María tiene $34. Ella tiene $15 menos que Marcela, por lo tanto Marcela tendrá $49. Además María tiene $12 más que Marta. Eso significa que Marta tiene $22. Si ahora sumamos lo que tienen entre las tres: 49 + 34 + 22 = 105 nos sobran $3. Descontando $1 a cada una llegamos a la siguiente respuesta: Marcela tiene $ 48, María $33 y Marta $21.

Nótese, que si bien este problema tiene una estructura similar a la del problema anterior, las relaciones que se establecen hacen que su resolución sea un poco más complicada.
¿Y si los números involucrados fueran decimales? Intente resolver el mismo problema pero suponiendo que entre las tres tienen 103,75 y que María tiene $15,45 menos que Marcela y $13,65 más que Marta.

Problema 3

Esteban participó en un programa de televisión. El juego consistía en responder 50 preguntas. Por cada pregunta bien contestada el participante ganaba $25 pero le descontaban $15 por cada pregunta mal contestada. Esteban ganó $370. ¿Cuántas preguntas contestó bien?

:I Primero intente resolver el problema y luego compare su resolución con la que nosotros le proponemos. Más adelante también propondremos otros caminos de resolución**.**

Una forma de resolver este problema podría ser analizando posibles situaciones particulares. Si multiplico la cantidad de respuestas correctas por 25 y le resto el total de respuestas incorrectas por 15 debo obtener 370. Para organizar la información podríamos construir una tabla como la siguiente:

Cantidad de respuestas correctas	Importe	Cantidad de respuestas Incorrectas	Importe	Total
1	25	49	735	-710
2	50	48	720	-670
3	75	47	705	-630
....				
20	500	30	450	50
21	525	29	435	90
....				
28	700	22	330	370
....				
50	1250	0	0	1250

Nótese que aquí probamos sólo con algunos valores hasta encontrar la solución. Por otra parte las preguntas eran 50. ¿Qué hubiera sucedido con 100 preguntas o más?

Conclusión

Teniendo en cuenta las relaciones establecidas entre los datos de un problema, muchas veces la resolución aritmética se torna difícil, o muy tediosa o incluso imposible. Cuando esto sucede, los matemáticos disponen de otro recurso para resolverlos: el álgebra. Mediante el planteo y resolución de ecuaciones es posible resolver de forma sencilla muchos de los problemas cuya resolución aritmética no lo es.
Pero para ello hay que traducir el enunciado del problema al lenguaje algebraico y disponer de los conocimientos adecuados para trabajar con las ecuaciones que resultan planteadas.

:::.. Lenguaje algebraico

Usted ya trabajó con lenguaje simbólico o algebraico en el módulo de funciones. Además puede encontrar ejemplos en el Libro 5. Si no lo tiene puede solicitárselo a su tutor. En este módulo profundizaremos ese trabajo.

A las expresiones en las que se indican operaciones entre números y letras se las llama **expresiones algebraicas**. Las letras reciben el nombre de **variables** y pueden ser reemplazadas por distintos números. Son expresiones algebraicas, por ejemplo:

1) $3b + 2c + 4d$
2) $x^2 = 9$
3) $5x$
4) $a^2 + b^2$
5) $2^x = 8$
6) $2(x + 1) = 4x$
7) $3x + 2y = 5$
8) $S = b.h / 2$
9) $4 = x + 1$
10) $a+1 = a + 2$
11) $2b = b + b$

ACTIVIDAD 6

Escriba la expresión algebraica que representa a cada uno de los siguientes enunciados.

:| El doble de un número a.

:| La tercera parte de un número c.

:| El cuadrado de un número x.

:| El anterior del cuadrado de un número n.

:| El cuadrado del siguiente de un número d.

:| El producto de un número a por su siguiente.

:| La diferencia entre un número c y su consecutivo.

ACTIVIDAD 7

La edad de Pedro supera en 6 años a la edad de Martín. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones traducen esta situación? (p representa la edad de Pedro y m la de Martín).

:| m = p + 6

:| m = p . 6

:| p – 6 = m

:| p = m + 6

:| p – m = 6

:| m – p = 6

ACTIVIDAD 8

Escriba en lenguaje coloquial cada una de las expresiones algebraicas presentadas como ejemplo.

ACTIVIDAD 9

Una cada una de las afirmaciones siguientes con su correspondiente expresión algebraica.

:| El cuadrado de la suma de dos números a y b	a3 – b3
:| El triple del anterior de un número c	3c – 1
:| El cuadrado de un número a disminuido en b unidades	(a – b)3
:| El anterior del triple de un número c	$(a + b)^2$
:| La diferencia entre los cubos de dos números a y b	3 (c – 1)
:| El cubo de la diferencia de dos números a y b	a^2 - b

:::.. Operaciones con expresiones algebraicas

Cada término de una expresión algebraica está formado por una parte numérica y una parte literal. Por ejemplo: en la expresión $5\,a^2$, 5 es la parte numérica y a^2 es la parte literal.

Se llaman términos semejantes a los que tienen la misma parte literal. Por ejemplo: 5 b es semejante a 2 b, $3\,x^2$ es semejante a $2\,x^2$, 4 a b es semejante a 6 a b.

:::.. Suma y resta

Al sumar y restar expresiones algebraicas sólo se pueden sumar o restar los términos semejantes.

Por ejemplo:

$3b + 2\,b = 5\,b$

$2a + 3b - b + 4a = 6\,a - 2\,b$ (esta expresión no puede reducirse más pues 6a no es semejante a 2b)

La suma y la resta de expresiones algebraicas cumplen con las mismas propiedades que la suma y resta de números. Por ejemplo:

Propiedad conmutativa

$3\,b + 2\,b = 2\,b + 3\,b = 5\,b$

El orden en que se realiza la suma no altera el resultado.

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y la resta

$3\,(a + 2b) = 3a + 6\,b$

Si tenemos que multiplicar un número por la suma de otros dos, podemos multiplicar primero cada uno de los números y luego sumar.

ACTIVIDAD 10

Realice las siguientes operaciones. Indique, en cada caso, las propiedades utilizadas.

a) $2a - 3b + 4(a - b) =$

b) $2ab + 3(a - b) + 4b - 5ab =$

c) $x + x^2 - 3x + 4x^2 =$

d) $3x + 2y - (x + y) =$

::::. Multiplicación

Al multiplicar expresiones algebraicas se multiplican las partes numéricas y en las partes literales se aplica la propiedad del producto de potencias de igual base.

Producto de potencias de igual base

$a^1 \cdot a^2 = a \cdot \underbrace{a \cdot a}_{a^2} = a^3$

$a \cdot a^2 \cdot a^5 = a^{1+2+5} = a^8$

Exponentes

Base

Cuando se multiplican potencias de igual base, se obtiene una potencia con la misma base y cuyo exponente es igual a la suma de los exponentes dados.

Ejemplos:

$3.\ 2x \cdot 4x^2 = 3.2.4.x^{1+2} = 24x^3$

$2a^2 \cdot 3b^3 \cdot 4ab = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^{2+1} \cdot b^{3+1} = 24a^3 b^4$

ACTIVIDAD 11

Realice las siguientes operaciones:

a) $3\ b\ .\ 4\ a\ 4.\ 5\ a\ b^2 =$

b) $4\ x\ .\ 2\ x^2 =$

c) $5\ xy\ .\ 4\ x^2y =$

d) $-\ 3\ a\ .\ 2\ ab.\ (\ -\ 3b^2\ )=$

ACTIVIDAD 12

Realice las siguientes operaciones combinadas:

a) $x + 2\ x =$

b) $x\ .\ 2x =$

c) $x\ .\ x\ .\ x\ .\ x + 2\ x^2.\ X^2\ + 5\ x\ .\ x3 =$

d) $b + 2\ b + b^2$

e) $4x\ (\ 2 – 3\ x + x\ ) =$

:::.. Las expresiones algebraicas como herramienta para resolver problemas

:::.. **Ecuaciones**

Las **ecuaciones** son expresiones algebraicas que contienen una igualdad. Pueden contener una o más variables. Cada letra distinta indica una variable.
Algunos ejemplos de ecuaciones son:

1) $x^2 = 9$
2) $2^x = 8$
3) $2\ (\ x + 1\ ) = 4\ x$
4) $3\ x + 2\ y = 5$
5) $S = b.\ h\ /\ 2$
6) $4 = x + 1$
7) $a+1 = a + 2$

8) $2b = b + b$
9) $x = 3$

Encontrará más ejemplos de ecuaciones en el Libro 5, pag. 72. Si no lo tiene puede solicitárselo a su tutor.

Los ejemplos 1, 2, 3, 6, 7, 8 y 9 corresponden a ecuaciones con una variable, la x. El ejemplo 4 corresponde a una ecuación con dos variables, x e y. El ejemplo 5 corresponde a una ecuación con tres variables, S, b y h

Según el valor que le demos a las variables la igualdad será verdadera o falsa.

Por ejemplo:

La ecuación 1 será verdadera si x vale 3 o – 3 y será falsa para cualquier otro valor pues $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$ pero cualquier otro número al cuadrado no da 9. Por ejemplo $5^2 \neq 9$.
Decimos entonces que 3 y – 3 son las soluciones de la ecuación 1.

La ecuación 4 tiene dos variables. En este caso habrá pares de valores que verifiquen la igualdad. Por ejemplo: si $x = 1$ e $y = 1$ la igualdad es verdadera. Lo mismo sucede si $x = 2$ e $y = -\frac{1}{2}$. En cambio si $x = 4$ e $y = 2$ la igualdad es falsa. Por lo tanto existen infinitos pares (x, y) que hacen verdadera la igualdad. Decimos que esta ecuación tiene infinitas soluciones.

La ecuación 5 es una ecuación con tres variables. Por lo tanto existirán ternas de valores que hagan verdadera la igualdad. Por ejemplo: $S = 6$, $b = 3$, $h = 4$
Esta ecuación tendrá infinitas soluciones. Cada una será una terna (S, b, h).

En la ecuación 7 la igualdad es falsa para cualquier valor de a. Si a un número le sumamos 1 nunca va a dar el mismo resultado que si le sumamos 2. Se trata de una ecuación que no tiene solución.

En la ecuación 8, en cambio, cualquier valor de b hace verdadera la igualdad. Todos los números reales son solución de esta ecuación. Decimos que la ecuación tiene infinitas soluciones. Este tipo de ecuaciones recibe el nombre de identidades.

Las ecuaciones 2, 6 y 9 tienen una sola solución. En todas ellas la igualdad es verdadera si **x** vale 3 y falsa para cualquier otro valor de **x**.

El conjunto de todos los valores que pueden tomar las variables de modo tal que la igualdad resulte verdadera recibe el nombre de conjunto solución.

En el caso de la ecuación 1 decimos que el conjunto solución está formado por los números 3 y – 3.

Lo simbolizamos S = {3; - 3 }

Resolver una ecuación significa hallar su conjunto solución. Dependiendo de la cantidad de variables y de la forma de la ecuación existen diferentes métodos para resolverlas, que veremos más adelante.

Las ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución se llaman ecuaciones equivalentes.

Por ejemplo: las ecuaciones 2, 6 y 9 son equivalentes. En todas ellas la igualdad resulta verdadera si **x** vale 3. O sea, todas tienen el mismo conjunto solución, que simbolizamos S = { 3 }

Podemos resumir la información anterior en el siguiente cuadro:

Ecuación	Cantidad de variables	Cantidad de soluciones	Conjunto Solución	Se lee
$x^2 = 9$	1	2	S = { 3; - 3 }	El conjunto solución está formado por los números 3 y – 3
$2^x = 8$	1	1	S = { 3 }	El conjunto solución está formado por el número 3
2 (x + 1) = 4 x	1	1	S = { 1 }	El conjunto solución está formado por el número 1
3x + 2 y = 5	2	Infinitas Por ejemplo: (1 ; 1), (2;1/2)	S= (x,y) ∈ R	El conjunto solución está formado por todos los pares (x, y) que verifican la igualdad
S= b.h / 2	3	Infinitas Por ejemplo: (6, 3, 4) (16, 4, 8)	S= (S,b,h) ∈ R	El conjunto solución está formado por todas las ternas de números reales que verifican la igualdad.

4 = x + 1	1	1	S= $\{\ 3\ \}$	El conjunto solución está formado por el número 3
a + 1 = a + 2	1	Ninguna	S = ∅	El conjunto solución es vacío
2b = b + b	1	Infinitas	S = R	El conjunto solución está formado por todos los números reales
x = 3	1	1	S= $\{\ 3\ \}$	El conjunto solución está formado por el número 3

ACTIVIDAD 13

Escriba una ecuación que:

a) Tenga una sola solución.

b) Tenga dos soluciones.

c) No tenga solución.

d) Sea equivalente a $3x - 2 = 10$.

e) Cuyo conjunto solución sea S =$\{\ 4\ \}$.

En las claves de corrección encontrará algunas posibles soluciones.

::::. **Resolución de ecuaciones**

En este Módulo trabajaremos la resolución de ecuaciones y su utilidad como herramienta para resolver problemas. Para comenzar le proponemos que resuelva la siguiente Actividad.

ACTIVIDAD 14

Plantee en forma de ecuación los problemas 1,2 y 3 propuestos al comienzo.

:l Compare las expresiones que planteó con las que proponemos a continuación.

En el problema 1 se pide hallar la cantidad de dinero que tiene cada uno de los hermanos. De acuerdo a quién se tome como referencia podemos plantear tres ecuaciones diferentes

a) Si llamamos **x** al dinero que tiene Pedro

Pedro: x
Juan: x + 1
Luis: x + 1 + 1

La ecuación que resulta es: x + x + 1 + x + 1 + 1= 63

b) Si llamamos **x** al dinero que tiene Juan

Pedro: x – 1
Juan: x
Luis: x + 1

La ecuación que resulta es: x – 1 + x + x + 1 = 63

c) Si llamamos **x** al dinero que tiene Luis

Pedro: x – 1 – 1
Juan: x –1
Luis: x

La ecuación que resulta es: x –1 –1 + x –1 + x = 63

En el caso del problema 2 también pueden plantearse tres ecuaciones diferentes según a quién se tome como referencia.

a) Si llamamos **x** al dinero que tiene Marcela

Marcela: x
María: x – 15
Marta: x – 15 – 12

La ecuación que resulta es: $x + x - 15 + x - 15 - 12 = 102$

b) Si llamamos **x** al dinero que tiene María

Marcela: $x + 15$
María: x
Marta: $x - 12$

La ecuación que resulta es: $x + x + 15 + x - 12 = 102$

c) Si llamamos **x** al dinero que tiene Marta

Marcela: $x + 12 + 15$
María: $x + 12$
Marta: x

La ecuación que resulta es: $x + 12 + 15 + x + 12 + x = 102$

En el problema 3 debemos averiguar la cantidad de respuestas correctas. Por lo tanto llamaremos **x** a la cantidad de respuestas correctas. La cantidad de respuestas incorrectas es 50 – **x** . Además por cada respuesta correcta se pagaron 25 $ y por cada incorrecta se restaron $ 15 con lo cual la cantidad total de respuestas correctas debe multiplicarse por 25 y el total de incorrectas por 15. Por lo tanto,

La ecuación que resulta es: $25x - 15(50 - x) = 370$

ACTIVIDAD 15

Resuelva las ecuaciones planteadas en la Actividad 14.

Para ello tenga en cuenta lo que ha leído sobre operaciones con expresiones algebraicas. Si le resulta difícil puede encontrar ejemplos en el Libro 5, pag. 76. Si usted no tiene este libro puede solicitárselo a su tutor.

:I Compare su resolución de las ecuaciones con las que nosotros le proponemos.

Dijimos que resolver una ecuación es encontrar su conjunto solución. O sea, todos los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad.
Veamos cómo proceder.

1) Cuando la ecuación es muy sencilla, puede resolverse mentalmente. Por ejemplo: para resolver la ecuación $x + 2 = 5$, basta con pensar qué número hay que sumar a 2 para que el resultado sea 5. Evidentemente este número es 3. Por lo tanto el conjunto solución es $S = \{ 3 \}$

2) En otros casos podemos resolver por tanteo. Por ejemplo, en la ecuación $3x + 15 = 84$ le vamos dando valores a **x** hasta encontrar el valor que verifica la igualdad. Por ejemplo, empezamos probando con $x = 15$ $3.\ 15 + 15 = 60$. Falta para llegar a 84. Entonces probamos con otro número mayor que 15.
Si $x = 20$, $3.20 + 15 = 75$. Todavía falta. Si $x = 25$, $3.\ 25 + 15 = 90$. Nos pasamos de 84. Por lo tanto el número buscado estará entre 20 y 25. Probamos con $x = 23$,
$3.\ 23 + 15 = 84$. Por lo tanto $S = \{23\}$ es el conjunto solución de la ecuación dada.

3) No siempre la ecuación es tan sencilla como para que se pueda resolver mentalmente. Tampoco el método por tanteo es sencillo si en la ecuación la variable aparece más de una vez o si la solución no es un número entero. Veamos, entonces, otra forma de resolución.
Esta consiste en ir transformando la ecuación dada en otras equivalentes, más sencillas, hasta llegar a la ecuación más sencilla de todas que es aquella en la cual la incógnita queda sola en uno de los miembros de la igualdad. Este procedimiento recibe el nombre de" ir despejando la incógnita".

Para despejar la incógnita debemos tener en cuenta las siguientes propiedades:

Propiedad uniforme

Si sumamos o restamos un mismo número o expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación, obtenemos una ecuación equivalente a la dada.

Si multiplicamos o dividimos por un mismo número o expresión algebraica (distinta de cero) a los dos miembros de una ecuación obtenemos una ecuación equivalente a la dada.

Propiedad cancelativa

Si sumamos y restamos un mismo número o expresión algebraica a un miembro de una ecuación obtenemos una ecuación equivalente a la dada.
Si multiplicamos y dividimos un término de una ecuación por un número distinto de cero obtenemos una ecuación equivalente a la dada.

Apliquemos estas propiedades a las ecuaciones de la Actividad 14.

Para el problema 1 tomemos el caso b)

$x - 1 + x + x + 1 = 63$

Si aplicamos la propiedad cancelativa 1 y – 1 se cancelan

x + x + x = 63

Agrupamos las x

3 x = 63

Aplicamos la propiedad uniforme y dividimos ambos miembros por 3

$$\frac{3x}{3} = \frac{63}{3}$$

Simplificamos y obtenemos

x = 21

Pedro: x – 1 = 21 – 1 = 20
Juan: x = 21
Luis: x + 1 = 21 + 1 = 22

Para el problema 2 tomemos el caso b)

x + x + 15 + x – 12 = 102

Aplicamos la propiedad uniforme restando 15 y sumando 12 a ambos miembros:

x + x + 15 – 15 + x – 12 + 12 = 102 – 15 + 12

Aplicamos la propiedad cancelativa y cancelamos 15 con -15 y 12 con -12

x + x + x = 102 – 15 + 12

Agrupamos las **x** y operamos:

3 x = 99

Aplicamos la propiedad uniforme y dividimos ambos miembros por 3

$$\frac{3x}{3} = \frac{99}{3}$$

Simplificamos y obtenemos:

x = 33

Marcela: $x + 15 = 33 + 15 = 48$
María: $x = 33$
Marta: $x – 12 = 33 – 12 = 21$

Puede usted resolver las otras ecuaciones propuestas para cada problema y verificar que el resultado obtenido, en términos del problema, no cambia.

> **Conclusión**
> El resultado de un problema no cambia a pesar de que para un mismo problema pueden plantearse distintas ecuaciones según a quién se tome como referencia pues una vez resuelta la ecuación deben interpretarse los resultados.

En el caso del problema 3 la ecuación planteada era:

$25 x – 15 (50 – x) = 370$

Aplicamos la propiedad distributiva

$25 x – 15 . 50 + 15 x = 370$

Operamos

$25 x – 750 + 15 x = 370$

Aplicamos la propiedad uniforme y sumamos 750 a ambos miembros

$25 x – 750 + 750 + 15 x = 370 + 750$

Aplicamos la propiedad cancelativa y cancelamos -750 con 750

$25 x + 15 x = 370 + 750$

Operamos

$40 x = 1120$

Aplicamos la propiedad uniforme y dividimos ambos miembros por 40

$$\frac{40 x}{40} = \frac{1120}{40}$$

Simplificamos y obtenemos

$x = 28$

Esteban tuvo 28 respuestas correctas.

ACTIVIDAD 16

Compare las primeras resoluciones que se propusieron para los problemas con las resoluciones algebraicas propuestas luego. Indique ventajas y desventajas de cada una de ellas.

Conclusión

Si comparamos, para cada uno de los problemas propuestos, las resoluciones aritméticas con las algebraicas veremos que en el caso del primer problema la resolución aritmética era más sencilla que el planteo de ecuaciones. A medida que la resolución aritmética se complica, la resolución algebraica resulta más conveniente. Ese es el caso del problema presentado en la Actividad 3.

En cada problema usted podrá decidir qué tipo de resolución resulta más apropiada.

ACTIVIDAD 17

A continuación le proponemos una serie de problemas para que resuelva utilizando el método que considere más conveniente.

a) Martín, Pedro, Luis y Juan están juntando dinero para comprarle un regalo de cumpleaños a su padre. Pedro aporta $2 más que Martín, Luis $2 más que Pedro y Juan $2 más que Luis. Entre los 4 tienen $104. ¿Cuánto dinero aporta cada uno?

b) María tiene 23 monedas, algunas de 10 centavos y otras de 25 centavos. En total tiene $ 4,55 ¿Cuántas monedas de cada clase tiene?

c) José trabaja en una empresa de medicina prepaga. Cobra un sueldo mensual de $ 600 y recibe en concepto de comisión $ 12,50 por cada nuevo afiliado que logra. ¿Cuántas personas debe afiliar por mes si quiere duplicar su sueldo básico?

:::.. Otros usos de las expresiones algebraicas

Hasta ahora hemos trabajado con un tipo de expresiones algebraicas, las ecuaciones que nos sirven como herramienta para resolver problemas.
A continuación veremos otros usos de las expresiones algebraicas.

:::.. Las expresiones algebraicas como herramienta para demostrar propiedades matemáticas

Problema 4

Martín está estudiando matemática. En un libro leyó las siguientes propiedades matemáticas:

a) La suma de dos números pares es siempre un número par.
b) La suma de dos números impares es siempre un número par.

¿Cómo puede hacer Martín para comprobar si estas afirmaciones son verdaderas?

:I Primero intente resolver el problema y luego compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

Para resolver este problema uno puede comenzar probando si las afirmaciones propuestas se verifican para algunos números.
Tomemos, por ejemplo, el caso a)

2 + 4 = 6 10 + 12 = 22 52 + 84 = 136

Si encontráramos algún ejemplo que no cumpliera con la afirmación, bastaría para decir que es falsa (esto recibe el nombre de contraejemplo). Sin embargo, encontrar muchos ejemplos que sí la cumplen no basta para afirmar que es verdadera. Podría ser que, simplemente, todavía no encontramos el contraejemplo. Para poder afirmar que las proposiciones dadas son verdaderas, independientemente de los números elegidos, debemos recurrir a las expresiones algebraicas.

Veamos cómo proceder:

Un número par cualquiera puede escribirse de la forma 2n porque como n representa cualquier número al estar multiplicado por dos nos aseguramos que también podrá dividirse por dos, y por lo tanto será par. Siguiendo el mismo criterio, otro número par cualquiera podría ser 2m.
Sumando ambos números se obtiene 2n + 2 m
Sacando factor común 2

$$2n + 2m = 2 (n + m)$$

como la suma de dos números enteros es otro número entero podemos llamar **q** al resultado de sumar n + m

reemplazando nos queda
$2n + 2m = 2 q$

y como 2q también es la expresión de un número par, ahora sí podemos afirmar que la suma de dos números pares siempre será un número par.

Veamos que pasa con el caso b)

El siguiente de un número par es siempre un número impar, por lo tanto podemos decir que la expresión 2n + 1 corresponde a un número impar cualquiera. Otro número impar cualquiera podría expresarse como 2m + 1

Por lo tanto su suma sería 2n +1 + 2m + 1

Operando obtenemos
2n +1 + 2m + 1= 2 n + 2 m + 2
Sacando factor común 2
2n +1 + 2m + 1 = 2(n + m + 1)
Como n + m son números enteros, la suma que está dentro del paréntesis también es un número entero, al que llamaremos p
2n +1 + 2m + 1= 2p

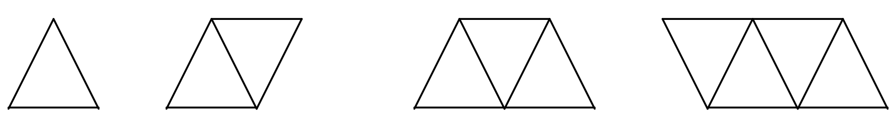
y como 2p también es la expresión de un número par, ahora sí podemos afirmar que la suma de dos números impares siempre será un número par.

Hemos utilizado las expresiones algebraicas para demostrar propiedades matemáticas.

:::.. Las expresiones algebraicas como herramienta para hacer generalizaciones

Veamos ahora otro uso de las expresiones algebraicas.

Problema 5
Dibujamos un triángulo equilátero. Tenemos tres segmentos iguales que corresponden a cada uno de los lados del triángulo. Le adosamos otro triángulo igual. Ahora tenemos cinco segmentos de la medida de los lados del triángulo inicial. Repetimos el procedimiento de adosar triángulos. ¿Cuántos segmentos de la misma medida que los lados del triángulo inicial tendrá la figura obtenida al adosar 5 triángulos? ¿Y la que esté formada por 20 triángulos? ¿y para una cantidad **t** de triángulos?



Sugerencia: para calcular el número de lados que se obtienen al adosar 5 triángulos bastaría con dibujar un triángulo más y contar los lados. Pero este procedimiento se complica si tenemos 20 triángulos. Para resolver esta situación podemos armar una tabla como la siguiente y tratar de encontrar qué relación existe entre la cantidad de triángulos y los lados.

Triángulos	1	2	3	4	5	....	20	....	t
Lados	3	5	7	9					

:I Ahora intente resolver el problema y luego compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

Necesitamos generar una fórmula que nos permita calcular el número de lados, teniendo como dato la cantidad de triángulos. Para ello debemos encontrar un cálculo que relacione 1 con 3, 2 con 5, 3 con 7, 4 con 9 . La estructura del cálculo debe ser siempre la misma, lo que va cambiando es el valor correspondiente a la cantidad de triángulos.
O sea, debemos encontrar un cálculo utilizando el 1 que dé como resultado 3. Pero ese mismo cálculo, cambiando el 1 por 2 debe dar 5. Y cambiando el 2 por 3 debe dar 7.

Por ejemplo 1. 2 + 1 = 3
2. 2 + 1 = 5
3. 2 + 1 = 7
....
t. 2 + 1 = l

Observamos que para obtener la cantidad de lados hay que multiplicar la cantidad de triángulos por dos y luego sumar 1

Por lo tanto para 5 triángulos la cantidad de lados será 2.5 +1 = 11
Y para 20 triángulos tendremos 2. 20 + 1 = 41 lados
En general para **t** triángulos obtenemos la siguiente expresión que permite calcular la cantidad **l** de lados : l = 2 t + 1

Hemos usado las expresiones algebraicas para hacer generalizaciones.

Conclusión

Las expresiones algebraicas pueden ser utilizadas para resolver problemas (problemas 1, 2 y 3), para demostrar propiedades matemáticas (problema 4) y para hacer generalizaciones (problema 5).

ACTIVIDAD 18

Demuestre las siguientes propiedades:

a) La suma de un número par y otro impar es siempre impar.

b) El producto de dos números pares es siempre par.

c) El producto de dos números impares es siempre impar.

d) El producto de un número par por otro impar es siempre par.

ACTIVIDAD 19

Indique el valor que ocupará el décimo lugar en cada una de las siguientes sucesiones:

2, 5, 10, 17, 26, ...

2, 5, 8, 11, 14, ...

Sugerencia: complete primero las siguientes tablas y luego trate de encontrar una fórmula que relacione cada valor con su posición.

Posición	1	2	3	4	5	....	P
Valor	2	5	10	17	26	....	.....

Posición	1	2	3	4	5	....	P
Valor	2	5	8	11	14	....	....

:::.. Inecuaciones

A continuación trabajaremos con otro tipo de expresiones algebraicas, las inecuaciones. A diferencia de las ecuaciones que se traducen mediante igualdades, las inecuaciones se traducen mediante desigualdades, es decir que ambos miembros estarán relacionados por medio de los signos mayor (>), mayor o igual (≥), menor (<) o menor o igual (≤).
Por ejemplo:
Pedro tiene a lo sumo \$25 se traduce: $P \leq 25$

Laura y Marta juntaron entre ambas, por lo menos \$40 se traduce: $L + M \geq 40$
Juan es menor que Martín se traduce: $J < M$
Hoy a la tarde la temperatura superará los 15º C se traduce: $T > 15$

Problema 6

Plantee una expresión que permita resolver cada una de las situaciones siguientes:

a. Una mañana, Juan escucha por radio que la temperatura en ese momento es de 15º C. Anuncian que habrá ascenso de temperatura y que se espera una máxima de 23 º C. ¿Cuáles pueden ser los valores de temperatura para el resto del día, si se cumple el pronóstico?

b. En una verdulería el Kg. de naranjas cuesta \$1,50 y el Kg. de manzanas \$ 2. ¿Cuántos Kg. de naranjas y manzanas puede comprar una persona si no quiere gastar más de \$6?

:I Compare las expresiones que usted planteó con las que le proponemos a continuación.

En el caso a. vemos que la temperatura podrá tomar cualquier valor que sea mayor o igual 15 y menor o igual que 23.
Si llamamos T a la temperatura, esto se simboliza: $15 \leq T \leq 23$

En el caso b. lo que se gasta en cada fruta se obtiene multiplicando el precio por la cantidad de Kg. Además el gasto total debe ser menor o igual que \$6. Si llamamos **n** a los Kg. de naranja y **m** a los kg. de manzana, esto se simboliza:
$1{,}5\, n + 2\, m \leq 6$

Ciertos enunciados, como los que se utilizan en los ejemplos presentados, se traducen mediante **desigualdades.** Las expresiones algebraicas que están formadas por desigualdades, reciben el nombre de **inecuaciones**. En ellas también puede haber una o más variables. Resolver una inecuación significa hallar el conjunto de todos los valores que pueden tomar las variables de modo que la desigualdad sea verdadera, es decir hallar el conjunto solución.

El caso **a.** corresponde a una inecuación con una variable (la temperatura). La desigualdad será verdadera para cualquier valor comprendido entre 15 y 23. Por ejemplo, 15; 18; 20,5; 22, etc. y falsa para cualquier valor menor que 15 o mayor que 23. Por ejemplo 14; 11; 25, etc. Decimos entonces que 15; 18; 20,5; 22 son algunas de las soluciones de la inecuación. Son algunos de los valores que forman el conjunto solución.

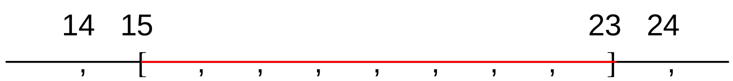
El caso **b.** corresponde a una inecuación con dos variables (los Kg. de naranjas y los Kg. de manzanas). La desigualdad será verdadera, por ejemplo si $n = 1$ y $m = 2$ o si $n = 2$ y $m = 2$ y será falsa si por ejemplo, $n = 3$ y $m = 1$Decimos, entonces que los pares (1,2) ; (2,2) son algunas de las soluciones de la inecuación. Son algunos de los pares que forman el conjunto solución.

Cuando se trata de inecuaciones con una variable, cuyo conjunto solución pertenece al conjunto de los números reales, se puede expresar el conjunto solución por medio de **intervalos.**

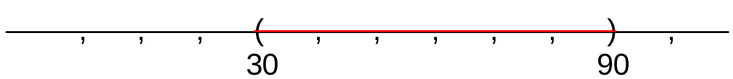
En nuestro caso S = {T $\in$ R / T $\in$ [15; 23] }y se lee: el conjunto solución está formado por todos los números reales tales que esos números pertenecen al intervalo [15; 23]

Recordemos algunos símbolos.

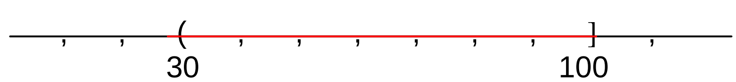
/ se lee: tal que
$\in$ se lee: pertenece
Este intervalo se representa en la recta numérica del siguiente modo
:



Los números 15 y 23 son los extremos del intervalo. Si, como en este caso, los valores extremos pertenecen al conjunto solución, el intervalo recibe el nombre de **intervalo cerrado** y usamos corchetes para simbolizarlo. Si, por el contrario, los valores extremos no pertenecen al conjunto solución, el intervalo es un **intervalo abierto** y usamos paréntesis para simbolizarlo.
Por ejemplo:
La cooperativa de electricidad de una ciudad de la Provincia de Buenos Aires ofrece un descuento del 10% en la facturación para aquellos usuarios cuyos consumos superen los $30 y no excedan los $90. ¿Cuáles deben ser los valores de consumo para poder acceder al beneficio?
Si llamamos **c** al consumo, vemos que este debe ser mayor que 30 y menor que 90, sin incluir ninguno de estos valores. Esto se simboliza $30 < c < 90$. Los valores de **c** se encuentran dentro del intervalo (30 ; 90). En la recta numérica se representa.



Si alguno de los extremos pertenece al conjunto solución y el otro no, el **intervalo** se llama **semiabierto o semicerrado.**
Por ejemplo:
Elsa sale de su casa con $100. Debe pasar por el banco a pagar un impuesto de $30. Luego tiene que ir al supermercado. ¿De cuánto dinero dispone para gastar en el supermercado?
Si llamamos **d** al dinero que le queda para gastar en el supermercado, los valores que puede tomar **d** se encuentran entre 30 y 100, sin incluir el 30, pero incluyendo el 100. Esto se simboliza $30 < d \leq 100$. Los valores de **d** se encuentran dentro del intervalo (30 ; 100] . En la recta numérica se representa.



ACTIVIDAD 20

Exprese mediante inecuaciones los siguientes enunciados.

a) Los números naturales menores o iguales que 4.

b) Los números reales mayores que –2 y menores que 5.

c) El precio de 4 cuadernos no supera los $15.

d) El dinero que tiene Pedro es a lo sumo igual al que tiene Juan.

e) El peso de Mariela es, por lo menos, igual al doble del peso de su hermanita, Laura.

f) El precio del Kg. de naranjas no supera al precio del Kg. de manzanas.

ACTIVIDAD 21

Indique cuál o cuáles de los siguientes valores de x corresponden a una solución de la siguiente inecuación.

$$3 (x - 1) + 2 > 5 x - 2$$

a) $x = 0$ b) $x = - 2$ c) $x = 2$ d) $x = 1/2$

ACTIVIDAD 22

Exprese las siguientes inecuaciones como intervalos de números reales y represéntelos en la recta numérica.

a) $-3 \leq x \leq 4$

b) $2 < x \leq 6$

c) $-4 \leq x < 4$

d) $5 < x < 8$

e) $x \leq 4$

f) $x > 2$

ACTIVIDAD 23

Dada la siguiente desigualdad $4 < 12$ realice en cada caso la operación indicada y establezca si se mantiene o no la desigualdad anterior.

a) Sumar a ambos miembros un número positivo.

b) Sumar a ambos miembro un número negativo.

c) Restar a ambos miembros un número positivo.

d) Restar a ambos miembros un número negativo.

e) Multiplicar ambos miembros por un número positivo.

f) Multiplicar ambos miembros por un número negativo.

g) Dividir ambos miembros por un número positivo.

h) Dividir ambos miembros por un número negativo.

Enuncie una conclusión.

A continuación compare su conclusión con la que figura en la clave de corrección.

:::.. Resolución de inecuaciones

Problema 7
Roberto trabaja como personal de maestranza en una editorial. Tiene que bajar paquetes con libros en un montacargas en el que puede cargar hasta 500 Kg. Sabiendo que Roberto pesa 85 Kg. y que cada paquete de libros pesa 25 kg., ¿Cuántos paquetes puede bajar, a lo sumo, en cada viaje?

:I Intente resolver el problema y luego compare su resolución con las que le proponemos a continuación.

Puede que usted haya resuelto el problema en forma aritmética.
Si el montacargas soporta hasta 500Kg y le descuento lo que pesa Roberto, me quedan 415 kg. para los libros. Como cada paquete de libros pesa 25 Kg. 415 dividido 25 es igual a 16,6.
Verifico el resultado obtenido. Como el número de paquetes debe ser un número natural, o llevo 16 paquetes o llevo 17.
17 x 25 = 425, me paso de los 415 Kg. permitidos
16 x 25 = 400
Entonces la respuesta correcta es: puede llevar hasta 16 paquetes en cada viaje.

También puede resolver este problema por tanteo, o sea buscando valores hasta llegar al correcto.
El peso que llevará en cada viaje se calcula multiplicando 25 por la cantidad de paquetes y sumando 85 a ese resultado. El cálculo final no debe ser superior a 500.

Armemos una tabla.

paquetes	Peso total
1	85 + 25 x 1 = 110
2	85 + 25 x 2 = 135
5	85 + 25 x 5 = 210
8	85 + 25 x 8 = 285
15	85 + 25 x 15 = 460
16	85 + 25 x 16 = 485
17	85 + 25 x 17 = 510

Con 16 paquetes no se llega a 500Kg, pero con 17 se pasa. Por lo tanto no puede llevar más de 16 paquetes en cada viaje.

Por último vamos a proponer una forma algebraica. Para ello es necesario traducir el enunciado del problema en una inecuación. Si llamamos **x** a la cantidad de paquetes que se puede llevar en cada viaje obtenemos la siguiente expresión:

$25 \,.\, x + 85 \leq 500$

Ahora debemos despejar la incógnita. Para ello procederemos de forma similar a como lo hicimos para resolver ecuaciones. Pero, además, deberemos tener en cuenta las conclusiones de la actividad 23.

Restamos 85 a ambos miembros y mantenemos el sentido de la desigualdad

$25 \,.\, x + 85 – 85 \leq 500 – 85$

Operamos

$25 \,.\, x \leq 415$

Dividimos ambos miembros por 25 y mantenemos el sentido de la desigualdad

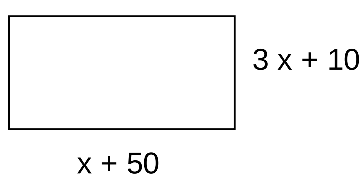
$$\frac{25 \,.\, x}{25} \leq \frac{415}{25}$$

Operamos y obtenemos

$$x \leq 16{,}6$$

Como el número que buscamos debe ser natural, el número es 16.

Problema 8
Hallar los valores de **x** para los cuales la base es mayor que la altura.



:I Intente resolver el problema y luego compare su resolución con las que proponemos a continuación.

Una posible forma de resolución sería por tanteo. Para ello conviene disponer los datos en una tabla como la siguiente:

X	Base (x + 50)	Altura (3x + 10)
5	55	25
15	65	55
20	70	70
21	71	73

Vemos que para valores hasta 20, sin incluirlo, la base es mayor que la altura. Para **x** igual a 20, la base es igual a la altura y para valores mayores de 20, la base es menor que la altura.
Por lo tanto los valores de **x** para los cuales la base es mayor que la altura deben ser menores que 20.

Antes de continuar con la lectura responda la siguiente pregunta.
¿Podemos considerar cualquier valor menor que 20, por ejemplo – 10? ¿Por qué?

Como estamos trabajando con un problema geométrico, ni la base ni la altura pueden ser nulas ni negativas. ¿Cuál es el menor valor que podemos darle a **x** de modo tal que tanto la base como la altura resulten positivas?
En el caso de la base es fácil ver que, para sea positiva, la **x** debe tomar valores mayores que – 50. En el caso de la altura podemos probar valores negativos de **x** hasta encontrar el valor a partir del cual la altura se anula o resulta negativa.
Le proponemos que intente encontrar la respuesta antes de proseguir con la lectura. No olvide tener en cuenta que los valores de los lados de una figura geométrica no tienen porque ser necesariamente números enteros.
¿Encontró usted el valor que buscaba?
Seguramente no le resultó sencillo.

Veamos ahora la resolución algebraica:
Si traducimos en símbolos el enunciado del problema, obtenemos la siguiente inecuación:

$x + 50 > 3x + 10$

Despejemos la incógnita. Para ello debemos agrupar en uno de los miembros los términos que tienen la incógnita y en el otro los que no la tienen.

Restamos 50 y 3x a ambos miembros y mantenemos el sentido de la desigualdad

$x + 50 - 50 - 3x > 3x + 10 - 50 - 3x$

Cancelamos 50 con – 50 y 3x con – 3 x

$x - 3x > 10 - 50$

operamos

$-2x > -40$

Dividimos ambos miembros por -2 y como se trata de un número negativo cambiamos el sentido de la desigualdad

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-40}{-2}$$

Operamos y obtenemos

$x < 20$

Para recordar:

> Para resolver una inecuación deben seguirse los mismos pasos que para resolver una ecuación pero teniendo en cuenta que, si en algún paso necesita multiplicar o dividir ambos miembros de la desigualdad por un número negativo hay que cambiar el sentido de la desigualdad.

Ahora debemos tener en cuenta las otras condiciones del problema. Tanto la base como la altura deben ser números positivos. Escribamos estas condiciones en lenguaje simbólico:

$x + 50 > 0$ y $3x + 10 > 0$

Resolvamos estas inecuaciones:

$x + 50 - 50 > 0 - 50$ $\qquad$ $3x + 10 - 10 > 0 - 10$

$x > -50$ $\qquad$ $\dfrac{3x}{3} > \dfrac{-10}{3}$

$x > -10/3$

Como los valores de **x** tienen que cumplir con las dos condiciones y los números mayores que – 50 son mayores que – 10/ 3 , debemos tomar valores mayores que – 10/3

Por lo tanto la respuesta de nuestro problema sería. Los valores que puede tomar **x** para que la base resulte mayor que la altura deben ser mayores que – 10/3 y menores que 20.
En símbolos expresamos el conjunto solución de la forma siguiente:

$S = \{ x \in R / x \in (-10/3 ; 20) \}$

ACTIVIDAD 24

Una empresa de telefonía cobra mensualmente $33 en concepto de abono y $ 0,045 por cada minuto que se utilice el servicio. ¿Cuántos minutos puede hablar, a lo sumo, una persona que no quiere pagar más de $50 mensuales?

ACTIVIDAD 25

Adriana dispone de \$50 para comprarse ropa. No le alcanza para comprarse dos pantalones, pero si compra dos remeras del mismo precio y un pantalón que cuesta \$ 29 le sobra. ¿Cuál puede ser, como máximo, el precio de cada remera?

ACTIVIDAD 26

Encuentre tres soluciones enteras (soluciones cuyos valores sean números enteros) para cada una de las siguientes inecuaciones.

a) $3x - 2x + 2 < 2 (x - 1)$

b) $5x - 3 \geq 2x - (x + 3)$

ACTIVIDAD 27

Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, expréselo como intervalo y represéntelo en la recta numérica.

a. $2x - 1 > 3 (x - 2) + 4$

b. $3 x - 4 (3 + x) \leq 5x$

Unidad 2: Ecuaciones

Problema 1
En un espectáculo teatral las entradas costaban \$ 15 para los mayores y \$ 10 para los menores de 12 años. Un día determinado se recaudaron \$ 4.500. Con esta información, ¿es posible saber, exactamente, cuántos mayores y cuántos menores asistieron ese día?

:I Antes de proseguir con la lectura, intente resolver el problema.
A continuación realice las siguientes actividades.

a) Identifique las incógnitas, asígneles una letra a cada una y escriba el enunciado del problema en lenguaje simbólico.

b) Escriba cinco posibles soluciones y explique cómo hizo para hallarlas.

c) Grafique los pares que corresponden a las posibles soluciones, en un sistema de ejes cartesianos.

d) Indique entre qué valores se pueden encontrar los valores de las soluciones

:I Ahora compare su forma de resolver con las que proponemos a continuación:

Por ejemplo, para la situación propuesta, podemos llamar **x** a la cantidad de mayores e **y** a la cantidad de menores que asistieron al teatro ese día y escribir la siguiente ecuación: $15\,x + 10\,y = 4.500$
También podríamos llamar **x** a la cantidad de menores e **y** a la cantidad de mayores. En ese caso obtendríamos esta otra ecuación: $15\,y + 10\,x = 4.500$
Veremos, más adelante, que esto no cambia la solución del problema
Una forma de encontrar las soluciones es tomar cualquiera de las expresiones anteriores e ir probando valores para cada una de las letras hasta encontrar aquellos que verifican la igualdad planteada.
Este camino puede no ser sencillo.

¿Existirá alguna manera más fácil?

Tomemos, por ejemplo, la primera expresión $15\,x + 10\,y = 4.500$ y escribamos las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$10\,y = 4.500 - 15\,x$$

$$y = \frac{4500 - 15\,x}{10}$$

$$y = 450 - 1{,}5\,x$$

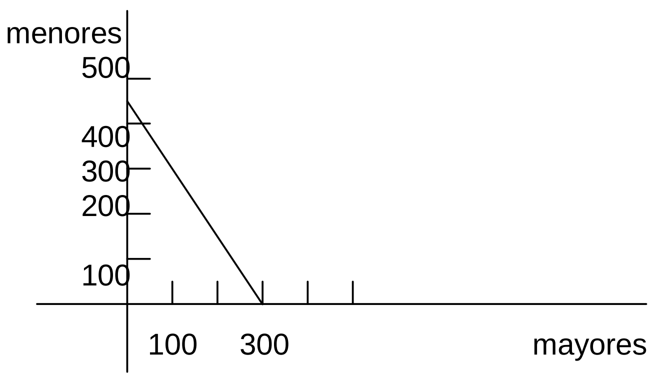
Vayamos asignándole valores a una de las letras, en este caso la **x**, y calculemos cuánto debe valer la **y** . Tengamos en cuenta que sólo podemos asignar a **x** números naturales pues **x** representa cantidad de personas.

Por ejemplo, si asignamos a **x** el valor 30 y realizamos el siguiente cálculo: 450 – 1,5 . 30 , obtenemos el valor correspondiente de **y**. En este caso, 405.

Repitiendo este procedimiento para otros valores de **x** podemos obtener otras soluciones.
Si para un determinado valor de **x** elegido hacemos el cálculo y no nos da un número natural, lo descartamos porque tanto **x** como **y** se refieren a cantidad de personas y deben ser números naturales.

Los pares (30; 405), (100; 300), (200; 150), (150; 225) son algunos de los pares que son solución de la ecuación planteada.

Representando estos pares en un sistema de ejes cartesianos, obtenemos la siguiente gráfica:



Los puntos quedan alineados. Los pares ordenados que son solución de esta ecuación son las coordenadas naturales de puntos que pertenecen a la recta $y = 450 - 1,5\,x$

La respuesta al problema planteado sería:
Con la información que nos dan no es posible saber exactamente cuántas personas concurrieron al teatro ese día. Podrían haber ido 30 mayores y 405 menores, o 100 mayores y 300 menores, o 200 mayores y 150 menores, etc.

Veamos qué sucede si trabajamos con la otra expresión:

$15\,y + 10\,x = 4.500$

Tal como hicimos antes, despejemos una de las letras.

$15\,y = 4.500 - 10\,x$

$$y = \frac{4.500 - 10\,x}{15}$$

y = 300 – 2/3 x

Vayamos dándole valores a **x** y calculando los respectivos valores de **y**

Por ejemplo: si x = 300, y = 300 – 2/3 . 300 = 100

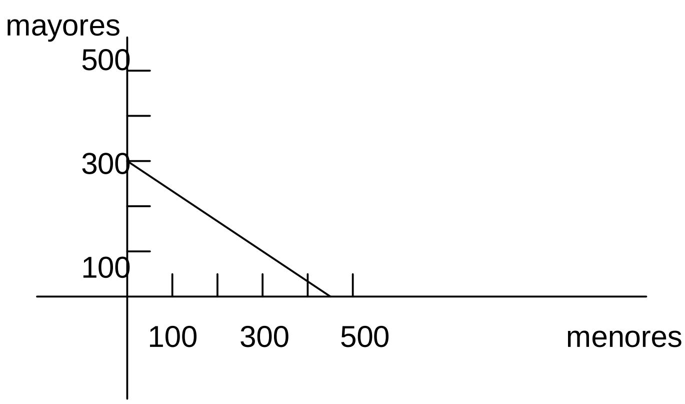
Si x = 150, y = 300 – 2/3 . 150 = 200

Los pares (300; 100), (150; 200) son algunos de los pares que son solución de la ecuación planteada.

Teniendo en cuenta que, en este caso, **x** representa la cantidad de menores e **y** la cantidad de mayores, la respuesta al problema planteado sería:
Con la información que nos dan no es posible saber exactamente cuántas personas concurrieron al teatro ese día. Podría haber 300 menores y 100 mayores, o 150 menores y 200 mayores, etc. que coincide con la obtenida anteriormente.

¿Y qué sucede con el gráfico?

Representando estos pares en un sistema de ejes cartesianos, obtenemos la siguiente gráfica:



Donde ahora todo lo que antes estaba sobre el eje **x** está sobre el eje **y** y viceversa.

Nuevamente los puntos quedan alineados. En este caso los pares ordenados que son solución de esta ecuación son las coordenadas naturales de puntos que pertenecen a la recta
y = 300 – 2/3 x

A modo de síntesis

Según qué letra se le asigne a cada variable se obtendrán diferentes expresiones para trabajar pero esto no cambiará la respuesta del problema pues cuando se interpreten las soluciones se lo hará teniendo en cuenta el significado que, previamente, le hemos dado a cada letra.

Problema 2

Martín y Pedro son compañeros de trabajo. Un día, a la salida del trabajo van a tomar un café juntos. Cuando llega el momento de pagar, Martín le propone a Pedro: Acabo de pensar en dos números. Si adivinás qué números pensé, pago yo. Si no, pagás vos; Pero, para que el trato no sea injusto, voy a darte una pista: el siguiente de uno de esos números es igual al doble del otro. ¿Le conviene a Pedro aceptar el trato? ¿No estará Martín haciendo lo posible por no pagar el café?

:I Nuevamente intente resolver el problema y realizar las actividades que figuran a continuación, antes de seguir leyendo.

a) Identifique las incógnitas, asígneles una letra a cada una y escriba el enunciado del problema en lenguaje simbólico.
b) Escriba cinco posibles soluciones.
c) Grafique los pares que corresponden a las posibles soluciones, en un sistema de ejes cartesianos.
d) Indique entre qué valores se pueden encontrar los valores de las soluciones.

Ahora compare su forma de resolver con la que proponemos a continuación:

Llamando **x** a uno de los números buscados e **y** al otro, las posibles ecuaciones a plantear en este caso serían:

$x + 1 = 2y$ o $y + 1 = 2x$

Como ya dijimos es indistinto tomar una u otra para trabajar. Despejando **y** de ambas ecuaciones se obtendrían las siguientes ecuaciones equivalentes.

$Y = (x + 1) / 2 = 1/2\, x + 1/2$ o $y = 2x – 1$

Como resulta más sencillo operar con la segunda ecuación, usamos ésta para seguir trabajando.
Nuevamente vamos dando valores a **x** y obtenemos los correspondientes valores de **y.** Por ejemplo, si $x = 0$, $y = -1$; si $x = 1$, $y = 1$; si $x = 2$, $y = 3$; si $x = -1$, $y = -3$
Nótese que, como en este caso, tanto **x** como **y** se refieren a números, ahora no sólo podemos trabajar con números naturales sino que podríamos agregar números negativos, o sea trabajar con números enteros.

¿Se podrían asignar a **x** valores correspondientes a números reales, por ejemplo fracciones o números decimales?
:I Intente responder esta pregunta antes de seguir leyendo.

Como el enunciado del problema dice: el siguiente de un número.....no podemos trabajar con números reales. Sólo los números enteros tienen un número siguiente.

En este caso, cada una de las posibles soluciones corresponde a las coordenadas enteras de un punto de la recta $y = 2x - 1$

Veamos qué sucede con la cantidad de soluciones.
En el caso del problema Nº 1 de esta unidad, como existe un valor, el total del dinero recaudado, que no puede ser superado, y además tenemos que trabajar con números naturales, la cantidad de soluciones es un número finito.
En el problema Nº 2 debemos trabajar con números enteros pero no hay ningún valor que no pueda ser superado. La cantidad de soluciones es, por lo tanto, un número infinito.

La respuesta a nuestro problema sería: No le conviene a Pedro aceptar el trato. Acertar un par de números entre infinitos pares posibles es infinitamente más difícil que ganarse la lotería.

Conclusiones

- Las expresiones que usted ha planteado corresponden a ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tienen más de una solución posible.
- La cantidad de soluciones será finita o infinita, dependiendo del contexto del problema a resolver, o sea del campo numérico con el que se trabaje y de las restricciones del problema.
- Cuando representamos las soluciones en un sistema de ejes cartesianos, los puntos siempre quedan alineados.

ACTIVIDAD 28

A continuación le proponemos una serie de situaciones para que resuelva. Encontrará las respuestas en las claves de corrección que figuran al final del módulo.

Para cada una de ellas se pide que:

1. Identifique las incógnitas, les asigne una letra a cada una y escriba el enunciado del problema en lenguaje simbólico.

2. Escriba cinco posibles soluciones y explique cómo hizo para hallarlas.

3. Indique en qué casos la cantidad de soluciones es finita y en qué casos es infinita, justificando su respuesta.

a) Si Juan mide 10cm más que María, ¿Cuáles pueden ser las alturas de cada uno de ellos?

b) En una canasta, el doble de la cantidad de naranjas más el triple de la cantidad de pomelos es igual a 36. ¿Cuántas naranjas y cuántos pomelos puede haber en la canasta?

c) Pedro y Marta fueron juntos al supermercado. Entre ambos gastaron $100. ¿Cuánto dinero gastó cada uno?

d) La diferencia entre dos números es igual a 14. ¿Cuáles pueden ser esos números?

:::.. Sistemas de ecuaciones lineales

Problema 3

Volvamos a la situación del ejemplo 1 de esta Unidad. Nos informan que ese día asistieron al teatro 400 personas. ¿Podemos ahora saber con exactitud cuántos mayores y cuántos menores asistieron?

Tenemos ahora una nueva información. ¿Será posible encontrar algún par ordenado de números que satisfaga simultáneamente la información del problema 1 y esta nueva información?

:I Intente resolver el problema. Para ello le proponemos que resuelva las siguientes actividades.

a) Plantee esta **nueva información** en forma de ecuación

b) Encuentre algunas soluciones para esta ecuación. Explique cómo lo hizo.
c) ¿Coincide alguno de los pares hallados en el punto b con algún par que sea solución de la ecuación planteada en la Actividad 1?
d) Grafique esta nueva ecuación en el mismo sistema que realizó en el problema 1 de esta Unidad.

:I Una vez resueltos los puntos anteriores, compare su solución con la que nosotros le proponemos.

Planteando en forma de ecuación esta nueva información obtenemos que:

$x + y = 400$

Despejando

$y = 400 - x$

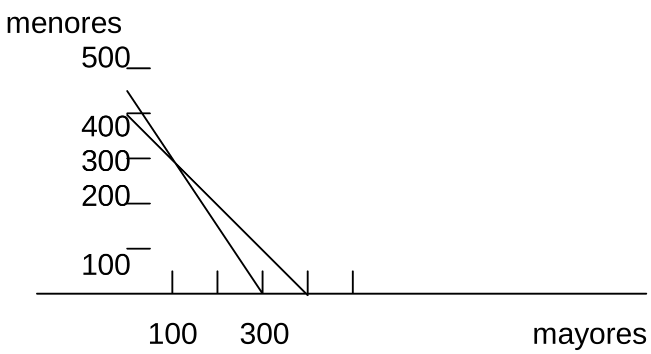
Dándole valores a **x**, obtenemos los correspondientes valores de **y.** Por ejemplo:
si $x = 50$, $y = 350$; si $x = 100$, $y = 300$; si $x = 200$, $y = 200$
Vemos que el par ordenado (100; 300) era una de las soluciones de la ecuación
$y = 450 – 1{,}5\,x$. (cumplía con las condiciones del problema 1). También es una de las soluciones de la ecuación $x + y = 400$ (Cumple con la nueva condición). Decimos entonces que el par ordenado (100; 300) es solución del **sistema de ecuaciones lineales:**

$$\begin{cases} y = 450 - 1{,}5\,x \\ x + y = 400 \end{cases}$$

Si tenemos más de una ecuación que deben resolverse simultáneamente, decimos que éstas forman un sistema de ecuaciones. Si todas las ecuaciones que forman parte del sistema son ecuaciones lineales (aquellas cuya representación gráfica es una recta) se tiene un sistema de ecuaciones lineales.

Volviendo a nuestro problema, ahora sí podemos responder con exactitud cuántas personas asistieron ese día al teatro: 100 mayores y 300 menores.

La gráfica conjunta de ambas ecuaciones nos muestra lo siguiente:



El par ordenado (100; 300) corresponde a un punto de la recta y = 450 – 1,5 x. También corresponde a un punto de la recta y = 400 – x
Es, por lo tanto, el punto donde ambas rectas se cortan, el punto que comparten ambas rectas.

Conclusión

La solución gráfica de un sistema de ecuaciones es el punto en el cual se cortan las rectas que corresponden a cada una de las ecuaciones del sistema.

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales, graficamos ambas ecuaciones en un mismo sistema de ejes cartesianos y hallamos el punto de intersección de ambas rectas.

ACTIVIDAD 29

Resolver gráficamente el siguiente problema:

Camila nació cuatro años después que su hermana, Victoria. Actualmente la suma de sus edades es 32. ¿Qué edad tiene hoy cada una de ellas?

:::.. Métodos analíticos de resolución de sistemas de ecuaciones

Hasta ahora hemos visto dos formas de resolver un sistema de ecuaciones:

1) Trabajar por separado con cada una de las ecuaciones, buscando soluciones para cada una de ellas hasta encontrar una solución que satisfaga a ambas. Esto puede ser muy difícil, sobre todo si el par buscado no pertenece a números enteros.

2) Graficar ambas ecuaciones y buscar el punto donde se cortan las rectas que las representan. Nuevamente, si el punto donde se cortan no tiene coordenadas enteras, sólo podremos dar una respuesta aproximada.

¿Existirá una forma más sencilla que nos permita encontrar la solución exacta?

Otra forma de encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, o sea de encontrar el par que verifica simultáneamente ambas ecuaciones, es trabajar algebraicamente.

En nuestro caso:

$$\begin{cases} y = 450 - 1,5\, x \\ x + y = 400 \end{cases}$$

se trata de encontrar los valores de **x** e **y** que verifican simultáneamente ambas igualdades.

Reemplazando la primera ecuación en la segunda obtenemos la siguiente ecuación

$$x + 450 - 1,5\, x = 400$$

Se obtiene, de este modo, una ecuación con una sola incógnita.
Resolviendo esta ecuación obtenemos el valor de **x**

$$x - 1,5\, x = 400 - 450$$
$$-0,5\, x = -50$$
$$x = \frac{-50}{-0,5}$$
$$x = 100$$

Una vez obtenido el valor de **x**, lo reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones que forman el sistema y obtenemos el correspondiente valor de **y**

$$100 + y = 400$$
$$y = 400 - 100$$
$$y = 300$$

Decimos que el conjunto solución de nuestro sistema es $S = \{(100; 300)\}$

Problema 4

Muchas veces nos ofrecen servicios similares y debemos optar por alguno de ellos teniendo en cuenta distintos aspectos; la calidad del servicio es uno de ellos; otro es el costo en función del uso que le daremos.

Por ejemplo:
Una empresa de telefonía ofrece el siguiente servicio: un costo fijo de $ 20 en concepto de abono, más un costo de $ 0,25 por cada minuto de uso.

Otra empresa ofrece: un costo fijo de $ 15 en concepto de abono, más un costo de $ 0,27 por cada minuto de uso.
¿Cuántos minutos debe hablar una persona para que le resulte indistinto contratar los servicios de una u otra empresa? ¿Cuánto debería pagar en ese caso?

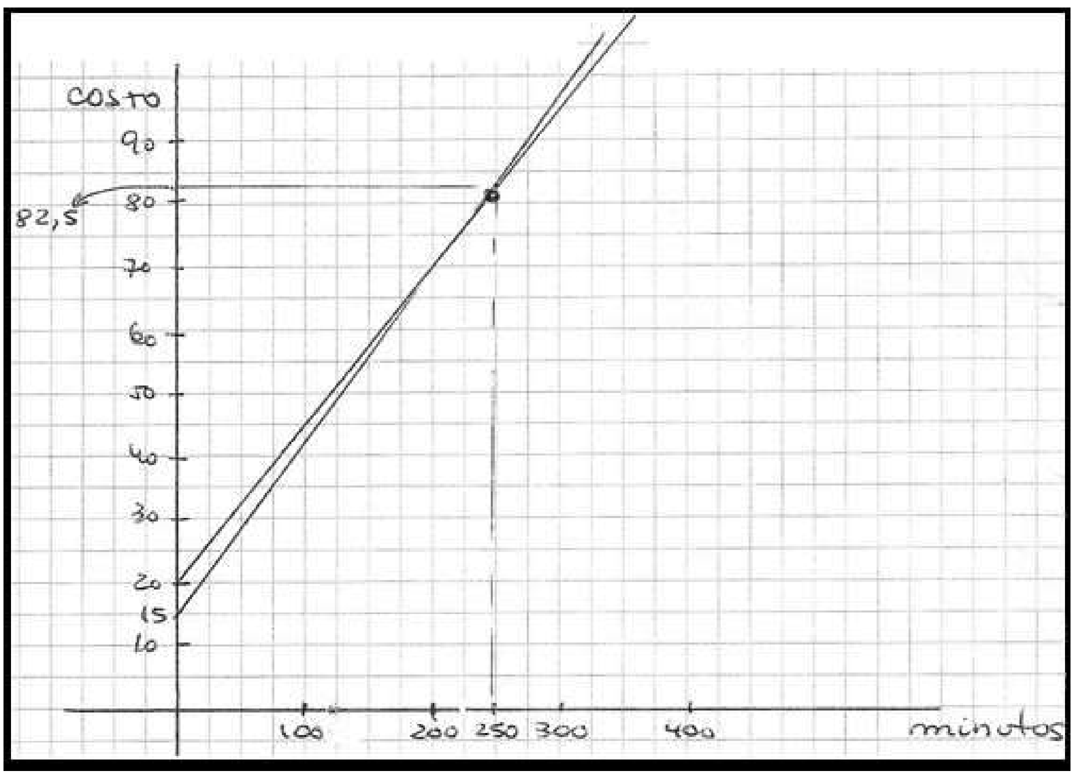
:I Intente resolver el problema y luego compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

Seguramente que para resolver este problema usted habrá planteado y resuelto un sistema de ecuaciones.
La resolución puede haber sido gráfica o analítica.
Por ejemplo
Planteamos el sistema

$$\begin{cases} y = 0,25\ x + 20 \\ y = 0,27\ x + 15 \end{cases}$$

donde **y** representa el costo total que debemos pagar por el servicio, y **x** representa los minutos hablados.

Representando ambas ecuaciones en un mismo sistema de ejes cartesianos obtenemos la siguiente representación:



El punto de intersección de ambas rectas es la solución buscada. Hemos resuelto el problema en forma gráfica.

Para resolverlo analíticamente podemos trabajar de la siguiente forma:

Queremos hallar la cantidad de minutos para la cual ambas empresas cobrarán lo mismo. Por lo tanto podemos igualar los costos, o sea igualar las **y** de ambas ecuaciones.

$$0{,}25\ x + 20 = 0{,}27\ x + 15$$

Nos queda, nuevamente, una ecuación con una sola incógnita.
Resolvemos esta ecuación:

$$20 - 15 = 0{,}27\ x - 0{,}25\ x$$
$$5 = 0{,}02\ x$$
$$\frac{5}{0{,}02} = x$$
$$250 = x$$

Reemplazando el valor de **x** en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obtenemos el valor de **y**

Si reemplazamos en la primera $\quad y = 0{,}25\ .\ 250 + 20$
$y = 82{,}\ 50$

Si reemplazamos en la segunda $\quad y = 0{,}27\ .\ 250 + 15$
$y = 82{,}50$

La respuesta del problema es: hablando 250 minutos resulta indistinto contratar los servicios de una u otra empresa. En ambos casos habrá que pagar $82,50

El conjunto solución de nuestro sistema está formado por el par (250; 82,50)
Se lo simboliza $S = \{ (250; 82{,}50) \}$

Como hemos visto, para resolver un sistema de ecuaciones hay muchos recursos, lo importante es saber elegir en cada caso el camino más conveniente.
En la resolución del problema Nº 4 de esta unidad el método que utilizamos se llama comúnmente de **igualación** (porque se igualaron las dos ecuaciones)
El camino que seguimos en la resolución analítica del problema Nº 3, también de esta unidad, que consistió en reemplazar una ecuación en la otra se llama habitualmente de **sustitución**, pero en el fondo es el mismo método, ya que cuando escribimos 0,25 x + 20 = 0,27 x + 15 también estamos sustituyendo

una ecuación en la otra. Existen otros métodos analíticos que no veremos en este módulo.

ACTIVIDAD 30

Para cada uno de los problemas siguientes plantee un sistema de ecuaciones que le permita resolverlo y hallar la solución en forma analítica.

a) En un triángulo rectángulo la amplitud de uno de los ángulos agudos es igual a la tercera parte de la amplitud del otro. Calcular la amplitud de cada uno de los ángulos. (Recordar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°)

b) Un comerciante va a un banco a pedir cambio en monedas para su negocio. Cambia $30 en monedas de 10 centavos y de 25 centavos. Si en total le dan 150 monedas, ¿cuántas monedas de cada clase recibió?

:::.. Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Problema 5

¿Existirán dos números tales que la suma de ellos sea 50 y el doble de uno de ellos más el doble del otro sea 40?

:I Antes de seguir leyendo trate de resolver el problema con alguno de los métodos que propusimos anteriormente.
:I Ahora compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

El sistema a resolver es el siguiente

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 2y = 40 \end{cases}$$

Despejando **y** de la primera ecuación y reemplazándola en la segunda:

$y = 50 – x$

$2x + 2 (50 – x) = 40$

Aplicando propiedad distributiva para eliminar el paréntesis:

$2x + 100 – 2x = 40$

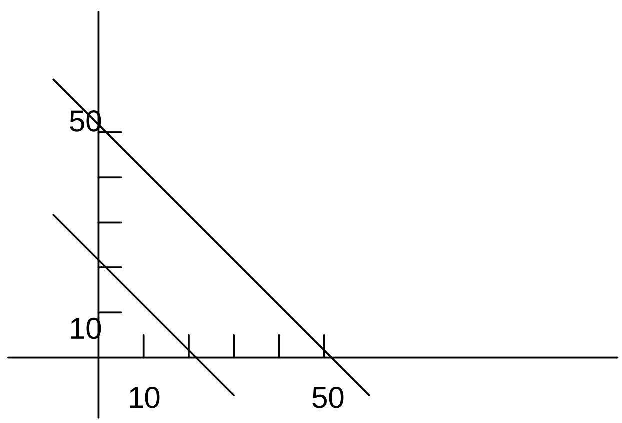
Operando:

$\cancel{2x} + 100 - \cancel{2x} = 40$

$100 = 40$

¿Cien igual a cuarenta?
Hemos llegado a una igualdad falsa. Eso significa que no hay ningún valor de **x** ni de **y** que verifiquen simultáneamente ambas ecuaciones. Por lo tanto decimos que el sistema planteado no tiene solución.

Si resolvemos gráficamente nos queda la siguiente representación:



Ambas rectas son paralelas. No se cortan en ningún punto.

El conjunto solución de este sistema no contiene ningún par de números. Se simboliza S = ∅
El símbolo ∅ significa conjunto vacío.
Se lee: conjunto solución, vacío.

Problema 6
¿Existirán dos números tales que la suma de ellos sea 50 y el doble de uno de ellos más el doble del otro sea 100?

:I Antes de seguir leyendo trate de resolver el problema con alguno de los métodos que propusimos anteriormente.
Ahora compare su resolución con la que proponemos a continuación.

El sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 2y = 100 \end{cases}$$

Despejando **y** de la primera ecuación y reemplazándola en la segunda:

$y = 50 – x$

$2x + 2 (50 – x) = 100$

Aplicando propiedad distributiva para eliminar el paréntesis

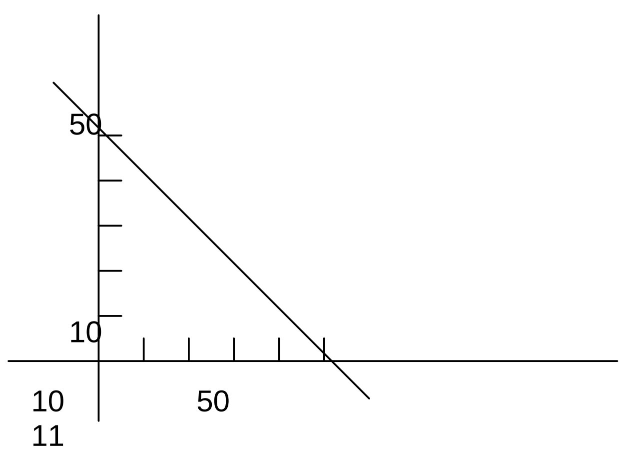
$2x + 100 – 2 x = 100$

Operando:

$100 = 100$

Hemos llegado a una igualdad que es siempre verdadera. Cualquier valor de **x** e **y** verifica las dos ecuaciones. Decimos, entonces, que el sistema tiene infinitas soluciones.
Las dos ecuaciones son equivalentes. La segunda se obtiene multiplicando la primera por dos.

Si resolvemos gráficamente nos queda la siguiente representación:



Ambas rectas son coincidentes. Se tocan en todos sus puntos. Los infinitos puntos de esas rectas son las infinitas soluciones del sistema.

El conjunto solución de este sistema esta formado por todos los pares de números reales. Se simboliza S = **R**
Se lee: conjunto solución, todos los números reales.

A modo de síntesis

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto formado por
todos los pares (x; y) que son solución de todas las ecuaciones.

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales puede suceder que el conjunto solución esté formado por un único par, por infinitos pares o por ninguno.

Observando los gráficos vemos que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede estar representado por:

- Dos rectas que se cortan en un punto
- Dos rectas paralelas
- Dos rectas coincidentes

El conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas puede estar formado por:

- Un único par de números, que corresponde a las coordenadas del punto donde las rectas se cortan. Problemas 3 y 4
- Ningún punto, pues las rectas no se cortan, son paralelas). Problema 5
- Infinitos puntos, pues las rectas se tocan en todos sus puntos (son coincidentes) Problema 6

Un sistema de ecuaciones se llama:

Compatible determinado si su conjunto solución está formado por un solo punto.

Incompatible si su conjunto solución es vacío.

Compatible indeterminado si su conjunto solución tiene infinitos puntos.

ACTIVIDAD 31

Para cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes, hallar su conjunto solución y clasificar el sistema.

Previamente analizar las ecuaciones y registrar observaciones. ¿Qué relación existe entre las ecuaciones?

a)

$$\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 8 \\ 6\,x + 4\,y = 16 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2\,x + 3\,y = 7 \\ 4\,x + 6\,y = 10 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3\,x + 4\,y = 23 \\ 2\,x + 6\,y = 22 \end{cases}$$

:::.. Sistemas con más de dos ecuaciones

Problema 7

Fernando y Claudia quieren invertir sus ahorros en un negocio. Están pensando en poner un almacén. Entre los dos reúnen $15.000 en efectivo. Fernando aportará $ 3.000 más que Claudia. Como Claudia se hará cargo de pagar los
$ 3.000 en concepto de gastos de alquiler inicial del local, calcula que ahora le queda en efectivo la tercera parte de lo que tiene Fernando.
¿Es correcto el cálculo que hace Claudia? ¿Cuánto dinero aporta cada uno en el negocio?

:I Antes de seguir leyendo intente plantear y resolver el problema anterior.
:I Ahora compare su resolución con la que proponemos a continuación.

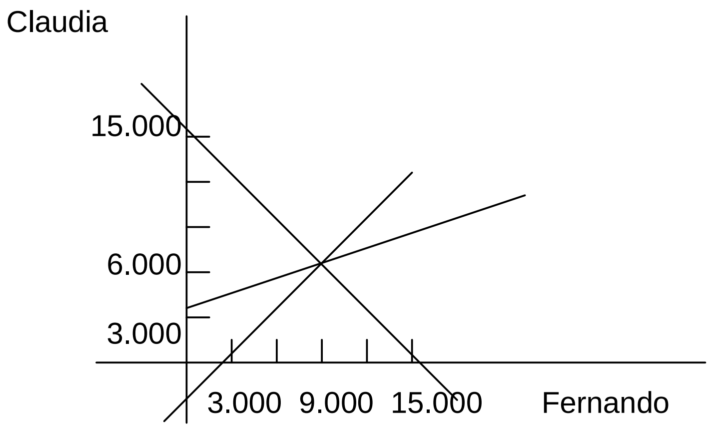
Llamando **x** a la cantidad de dinero que aporta Fernando e **y** a la cantidad de dinero que aporta Claudia, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 15.000 \\ x = y + 3.000 \\ y - 3.000 = x / 3 \end{cases}$$

Se trata, en este caso, de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

Al representarlo gráficamente podría suceder que las tres rectas pasaran por un mismo punto. Ese punto será, entonces, la solución del sistema. También podría ocurrir que las tres rectas no compartieran un mismo punto. En ese caso el sistema no tendría solución

Veamos que pasa en nuestro caso:
Para realizar este gráfico primero debemos elegir una escala adecuada. Veamos cómo proceder. En un eje representaremos lo que aporta Claudia y en el otro lo que aporta Fernando. Sabemos que entre los dos tienen 15.000 por lo tanto lo que aportará cada uno será menor que 15.000. Eso indica que en ninguno de los ejes necesitaremos marcar un valor que supere los 15.000. Por otra parte la diferencia entre los aportes de ambos es de 3.000. Esto indica que una buena escala sería considerar 1 cm = 3.000



Se observa que las tres rectas pasan por un mismo punto. Decimos entonces que ese punto es la solución de nuestro sistema de ecuaciones.

También podríamos resolver el problema en forma analítica.
Para ello formamos un sistema considerando dos cualesquiera de las ecuaciones (las que nos resulten más cómodas para trabajar) y hallamos los correspondientes valores de **x** e **y**. Estos valores hallados deben verificar la otra ecuación no considerada. Si esto sucede, los valores hallados constituyen la solución buscada. Si los valores encontrados no verifican la otra ecuación decimos que el sistema no tiene solución.

En nuestro caso elegimos trabajar con las dos primeras ecuaciones y planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 15.000 \\ x = y + 3.000 \end{cases}$$

Reemplazando la segunda ecuación en la primera:

$y + 3.000 + y = 15.000$

Resolvemos esta ecuación

$$\begin{aligned} 2y + 3.000 &= 15.000 \\ 2y &= 15.000 – 3.000 \\ 2y &= 12.000 \\ y &= 12.000 / 2 \\ y &= 6.000 \end{aligned}$$

Ahora hallamos el valor de **x**

$$\begin{aligned} x &= 6.000 + 3000 \\ x &= 9.000 \end{aligned}$$

Por último debemos ver si estos valores verifican la otra ecuación

$$y – 3.000 = x / 3$$

$$6.000 – 3.000 = 9.000/ 3$$

$$3.000 = 3.000$$

Podemos asegurar, entonces, que los cálculos de Claudia eran correctos. Para el negocio Fernando aporta $ 9.000 y Claudia $ 6.000

Conclusión

Un sistema con dos incógnitas y tres o más ecuaciones tiene solución si todas las rectas que representan a cada una de las ecuaciones pasan por el mismo punto.

A continuación le proponemos una serie de actividades para que resuelva. Encontrará las respuestas en las claves de corrección que figuran al final del módulo.

En cada una de las actividades:
1) Identifique las incógnitas involucradas.
2) Traduzca en ecuaciones las condiciones del problema y plantee un sistema
3) Resuelva el sistema gráfica y analíticamente. Justifique la elección que hace del método analítico.
4) Clasifique el sistema teniendo en cuenta la cantidad de soluciones halladas.

ACTIVIDAD 32

Pedro entrega pizzas a domicilio. Decide guardar todas las monedas de \$0,50 y de \$0,25 que recibe como propina. Cuando junta 100 monedas, las cambia por \$35 en billetes. ¿Cuántas monedas de cada valor juntó Pedro?

ACTIVIDAD 33

¿Se puede cambiar un billete de \$ 100 en cantidades iguales de billetes de \$2 y \$5?

ACTIVIDAD 34

Una cooperadora debe realizar una compra importante de papel. Pide presupuesto a dos empresas y le envían la siguiente información:

Empresa A : \$2,50 el m^2 de papel y \$ 15 en concepto de envío

Empresa B: \$ 3, 25 el m^2 sin gastos de envío.

a) Si necesitan comprar $10m^2$ de papel, ¿en cuál empresa conviene comprar?

b) ¿Cuántos m^2 deberían comprar para que resulte indistinto comprarle a cualquiera de las dos empresas?

ACTIVIDAD 35

El doble de la edad de Juan más el cuádruple de la edad de Francisco es 60. Además, si a la edad de Juan se le suma el doble de la edad de Francisco se obtiene 30. ¿Es suficiente esta información para calcular cuántos años tiene cada uno? Justifique su respuesta.

ACTIVIDAD 36

Marcela y Esteban están ahorrando dinero para comprar un regalo de cumpleaños a su madre. Entre los dos ya tienen juntados $ 200. Marcela tiene $50 más que Esteban. Marcela dice que si Esteban tuviese $ 20 menos, ya tendría ahorrado la mitad de lo que ella tiene. Pero Esteban dice que eso no es correcto. El tendría que tener $12,50 menos para tener la mitad de lo que tiene su hermana. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

Unidad 3: Polinomios

En esta Unidad vamos a continuar el trabajo con expresiones algebraicas relacionándolas con algunos conceptos trabajados con anterioridad, como es el caso de las ecuaciones (trabajadas en unidades anteriores) y las funciones (presentadas en otro Módulo). Es, por lo tanto, muy importante tener claros los conceptos aprendidos con anterioridad.

Si considera necesario relea el Módulo 1 de funciones antes de comenzar a trabajar con el material que proponemos a continuación.

Para comenzar intente resolver los siguientes problemas y luego compare su resolución con la que nosotros le proponemos.

Problema 1
Matías es vendedor en una empresa que se dedica a la venta de electrodomésticos. Recibe mensualmente un sueldo fijo de $ 500 y además le pagan un 5% sobre el total de las ventas, en concepto de comisiones.
¿Cuál es la expresión que permite calcular el sueldo de Matías?

Problema 2
Susana debe confeccionar manteles rectangulares para las mesas de un comedor escolar. No tiene aún las medidas exactas pero sabe que en todas ellas el largo es igual al doble del ancho. Además calcula que, alrededor de cada mantel necesita 10 cm más de tela para el volado y el dobladillo. ¿Cuál es la expresión que permite calcular la cantidad de tela que necesita para cada mantel en función de la medida del largo de las mesas?

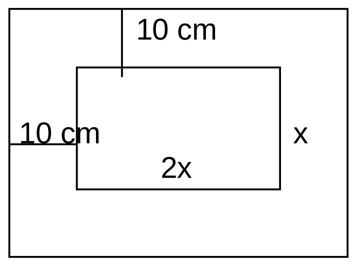
Problema 3
Una empresa fabrica piletas de lona. En cada pileta el largo es igual doble del ancho y la altura tiene 50 cm. menos que el ancho. ¿Cuál es la expresión que permite calcular el volumen de cada pileta en función del ancho?

:I Compare las expresiones que obtuvo con las que nosotros le proponemos.

Problema 1
Vemos que para calcular el sueldo correspondiente a un mes determinado, se deberán multiplicar las ventas por el porcentaje de comisión y luego sumarle el sueldo fijo. Para calcular el importe correspondiente a las comisiones se multiplican las ventas por 0,05 que resulta de multiplicar por 5 y dividir por 100. Como las ventas son variables (cambian de un mes a otro) las representamos con la letra x.
Nos queda, por lo tanto, la siguiente expresión:

S = 0,05 x + 500 donde x representa el importe de las ventas mensuales

Problema 2
Hagamos un esquema para representar la situación:

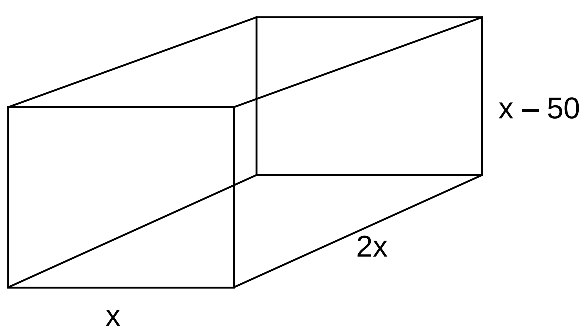


Necesitamos calcular la cantidad de tela, o sea la superficie de los manteles.
Recordemos que la superficie de un rectángulo se calcula con la fórmula
S = b . h
Según los datos del gráfico anterior, la base es igual a 2x más 20 cm que corresponden a los 10 cm que hay que dejar a cada lado para volados y dobladillo y la altura es igual a x más 20 cm, también para volados y dobladillo.
Remplazando estos datos en la fórmula de la superficie se obtiene la siguiente expresión:

$S = (2x + 20)\ (x + 20)$
Aplicando propiedad distributiva

$S = 2x^2 + 20x + 20x + 400$
$\mathbf{S = 2x^2 + 40x + 400}$ siendo x el ancho de las mesas

Problema 3
Hagamos un esquema para representar la situación.



Las piletas de lona son prismas rectos de base rectangular. Para calcular su volumen se deben multiplicar el ancho por el largo y por el alto. O sea: V = ancho x largo x alto.

Reemplazando los datos del gráfico anterior en la fórmula de volumen se obtiene la siguiente expresión:

$V = x \cdot 2x \cdot (x - 50)$ Aplicando propiedad distributiva

$\mathbf{V = 2x^3 - 100x^2}$

Veamos qué tienen en común todas las expresiones anteriores.

En todas ellas el segundo miembro es una expresión formada por términos donde aparece la variable elevada a un exponente natural y multiplicada por un cierto número. A veces también hay un término donde no aparece la variable y sólo está formado por un número. Los números por los que se multiplica la variable y el número solo reciben el nombre de coeficientes de la expresión.
Por ejemplo:
En la expresión **$S = 0{,}05\,x + 500$** el segundo miembro está formado por dos términos, 0,05 x y 500. En el primer término aparece la variable x elevada al exponente 1 y multiplicada por 0,05 y el segundo término está formado por un número solo, 500. Decimos entonces que 0,05 y 500 son los coeficientes de esta expresión.

En forma general las expresiones de este tipo pueden escribirse:
$a_1 x + a_0$ donde a_1 representa al coeficiente que multiplica a la variable que está elevada al exponente 1 y a_0 representa al número que aparece solo.

En la expresión **$S = 2x^2 + 40x + 400$** el segundo miembro está formado por tres términos, $2x^2$, $40x$ y 400. En el primer término aparece la variable x elevada al cuadrado y multiplicada por 2, en el segundo término aparece la variable x elevada al exponente 1 y multiplicada por 40 y el tercer término está formado por un número solo, 400.
2, 40 y 400 son los coeficientes de esta expresión.

En forma general las expresiones de este tipo pueden escribirse:
$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ donde a_2 representa al coeficiente que multiplica a la variable elevada al cuadrado, a_1 representa al coeficiente que multiplica a la variable que está elevada al exponente 1 y a_0 representa al número que aparece solo.

En la expresión **$V = 2x^3 - 100x^2$** el segundo miembro está formado por dos términos, $2x^3$ y $-100x^2$. En el primer término aparece la variable x elevada al cubo y multiplicada por 2 y en el segundo término aparece la variable x elevada al cuadrado y multiplicada por – 100.
2 y -100 son los coeficientes de esta expresión.

En forma general las expresiones de este tipo pueden escribirse:
$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ donde a_3 representa al coeficiente que multiplica a la variable elevada al cubo, a_2 representa al coeficiente que multiplica a la variable elevada al cuadrado, a_1 representa al coeficiente que multiplica a la variable que está elevada al exponente 1 y a_0 representa al número que aparece solo.

En nuestro ejemplo no aparece el término donde la variable esté elevada al exponente 1 ni tampoco aparece un número solo. Esto se debe a que los coeficientes a_1 y a_0 son iguales a cero. Es por eso que la expresión sólo tiene dos términos, aquel donde la variable aparece elevada al cubo y aquel donde aparece elevada al cuadrado.

En forma general, para una expresión donde la variable se encuentre elevada a un número n cualquiera, esto puede simbolizarse:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

donde **x** representa la variable, **n** representa el número al cual se eleva esa variable y **a** representa los coeficientes.

Este tipo de expresiones recibe el nombre de **polinomios** y las funciones cuya fórmula es un polinomio se llaman **funciones polinómicas**.

Veamos ahora algunos aspectos importantes a tener en cuenta pues le serán de utilidad para resolver los problemas y actividades que se proponen en el resto del módulo. Tome nota en su carpeta, escriba sus propios ejemplos y no dude en consultar a su tutor si tiene alguna duda.
En estas expresiones:

- **a_n ....a_0 se llaman coeficientes** del polinomio y son números reales

- **a_n es el coeficiente principal**. El coeficiente principal es el que acompaña a la x que está elevada al mayor exponente (recuerde que si el exponente es 1 no se escribe) En nuestros ejemplos los coeficientes principales son 0,05, 2 y 2 respectivamente.

- **a_0 es el término independiente**. El término independiente es el que no aparece multiplicado por la variable. En nuestros ejemplos los términos independientes son 500, 400 y 0 respectivamente. Nótese que en el tercer ejemplo el término independiente es cero pues no hay ningún término donde no aparezca la variable.
- **n es el grado del polinomio**. El grado corresponde al exponente más alto al que esté elevada la variable. En nuestros ejemplos los grados son 1, 2 y 3 respectivamente.

- Todas las potencias a las que se eleva la variable x son números naturales o cero. Por lo tanto el grado de un polinomio siempre es cero o un número natural.

- Si en un polinomio todos los coeficientes son ceros, el polinomio no tiene grado y se llama polinomio nulo.

ACTIVIDAD 37

Para cada uno de los polinomios que se indican a continuación señale: grado, coeficiente principal y término independiente.

a) P (x) = x3 – 2 x5 + 4x – 2

b) Q (x) = 3x4 – 4x + $6x^2$ + 3

c) R (x) = 5x – 2

d) T (x) = $3x^2$

e) M (x) = 5

Verifique sus respuestas consultando las claves de corrección que figuran al final del módulo.

Veamos cómo podemos relacionar lo visto hasta ahora con lo trabajado en el módulo de funciones.
Tomemos el caso de la expresión correspondiente al primer problema de esta unidad:
S = 0,05 x + 500

¿A qué tipo de función corresponde? ¿Por qué?

Vemos que se trata de una función lineal porque en su fórmula aparece la variable elevada a la potencia 1, multiplicada por un número (en este caso 0,05) más otro número solo, es decir, con la variable elevada a la potencia 0 (500). Recuerde que las funciones lineales tienen por fórmula expresiones del tipo: f (x) = a x + b

Para afianzar estos conceptos puede releer en el Módulo de funciones el apartado correspondiente a funciones lineales.

Por otra parte, podemos ver que se trata de un polinomio de grado 1 pues el exponente más alto al que aparece elevada la variable es 1.
Podemos afirmar, entonces, que **las funciones lineales son funciones polinómicas de primer grado.**

Veamos que sucede en el caso del problema 2 cuya expresión es
S = 2 x^2 + 40 x + 400

¿A qué tipo de función corresponde?

Podemos ver que esta expresión corresponde a la fórmula de una función cuadrática cuya fórmula general es:
$f(x) = a x^2 + b x + c$

Puede encontrar una explicación más detallada en el módulo de funciones, en el apartado correspondiente a funciones cuadráticas.
Además se trata de un polinomio de segundo grado pues el exponente más alto al que aparece elevada la variable es 2.
Podemos afirmar, entonces, que **las funciones cuadráticas son funciones polinómicas de segundo grado.**

En el caso del problema 3 cuya expresión es $\mathbf{V = 2x^3 - 100x^2}$

Vemos que esta expresión corresponde a un polinomio de grado 3. Se dice que es la expresión de una función polinómica de tercer grado.

Problema 4
Se necesita vaciar una pileta que contiene 48.000 l de agua. Para ello dispone una bomba que desagota 6.000 l por hora.

1. Escriba una expresión que le permita ir calculando el volumen de agua que queda en la pileta en función del tiempo de funcionamiento de la bomba.
2. a. ¿Cuánta agua quedará al cabo de 2 horas?
   b. ¿y luego de 5 horas?
   c. ¿Cuánto tiempo se necesitará para vaciar la pileta?
3. Realice una gráfica

:I Intente resolver el problema antes de proseguir con la lectura. Luego compare su resolución con la que le proponemos a continuación.

1) La expresión que permite conocer el volumen que queda en la pileta luego de cierto tiempo es:

$V(t) = 48.000 - 6000 \cdot t$

Podemos observar que esta expresión corresponde a una función polinómica de primer grado donde el término independiente vale 48.000 y el coeficiente principal es 6.000

2) a. $V(2) = 48.000 - 6.000 \cdot 2 = 48.000 - 12.000 = 36.000$

b. $V(5) = 48.000 - 6.000 \cdot 5 = 48.000 - 30.000 = 18.000$

c. Cuando la pileta está vacía $V(t) = 0$, luego

$0 = 48.000 - 6.000 \cdot t$ despejando t

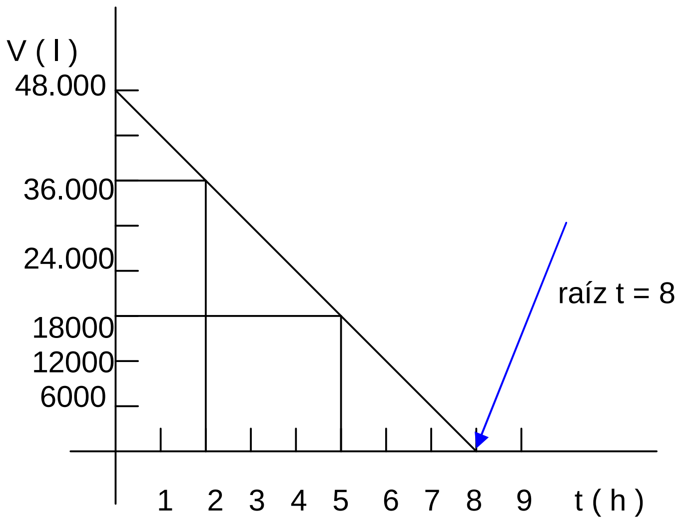
6.000 . t = 48.000

t = 48.000 : 6.000

t = 8

Para vaciar la pileta se necesitan 8 horas

3) Si graficamos la función



Como se dijo anteriormente, la expresión **V (t) = 48.000 – 6000 . t** que permite calcular el volumen de agua que queda en la pileta en función del tiempo corresponde a la fórmula de una función lineal cuyo segundo miembro es un polinomio de primer grado.

Para resolver los puntos **a** y **b** lo que se obtuvo fue el **valor numérico** de ese polinomio para t = 2 y t = 5

Llamamos valor numérico de un polinomio al valor que se obtiene al reemplazar la variable por un número determinado.

En el caso **c** tuvimos que hallar el valor de t para el cual la función era igual a cero.
Hemos hallado el **cero o raíz** del polinomio.

Llamamos cero o raíz de un polinomio al valor de la variable para el cual el valor numérico del polinomio es cero.

:I Tome nota en su carpeta de estas definiciones. Son dos conceptos muy importantes.

Gráficamente, los ceros o raíces de una función son los puntos donde la gráfica corta al eje x .Para nuestro ejemplo t = 8 es la raíz. Para t = 8 el volumen es igual a cero. En t = 8 la gráfica corta al eje x.

En general:

Si f (x) es una función polinómica y f (a) = 0 decimos que x = a es un cero o raíz de f (x)

Las funciones polinómicas de primer grado, como la del problema anterior, tienen una sola raíz. Para hallarla, basta con igualar a cero la función y despejar la variable independiente.

Más adelante veremos cómo hallar las raíces de polinomios de grado mayor que 1.

ACTIVIDAD 38

Dados los siguientes polinomios hallar el valor numérico para x = 2 y x = - 1

a) $P (x) = - 3 x^2 + 4 x + 3$

b) Q (x) = x 4 – 3 x 3 + 2 x

c) $R (x) = 5 x - 4 x^2 - 2$

ACTIVIDAD 39

Indicar, para cuál o cuáles de los polinomios siguientes $x = 3$ es una raíz

a) $P(x) = 2x^2 - 3x – 9$

b) $Q(x) = - x 4 – 2 x 3 + 3 x + 1$

c) $R(x) = 5x – 15$

d) $T(x) = 3x3 – 3x$

Encontrará las respuestas en las claves de corrección que figuran al final del módulo.

:::.. Operaciones con polinomios

:I Antes de continuar con la lectura relea lo trabajado en la unidad anterior sobre operaciones con expresiones algebraicas. Luego intente resolver el siguiente problema.

Problema 5
Una empresa calcula el precio de venta y el costo de producción unitarios de un determinado artículo mediante las siguientes fórmulas:
$P(x) = 7 – 0,5x$
$C(x) = 8 + 1,2x$

El ingreso es el producto de la cantidad de artículos vendidos por el precio unitario. La ganancia es la diferencia entre el ingreso y el costo.

1. Escriba una expresión que permita calcular el ingreso obtenido por la venta de x artículos.
2. Escriba una expresión que permita calcular la ganancia obtenida por la venta de x artículos.

:I Compare sus expresiones con las que proponemos a continuación.

Para calcular el ingreso $I(x)$ debemos multiplicar el precio $P(x)$ por la cantidad de artículos vendidos, x

$I(x) = P(x) . x$

Reemplazando P(x) por su expresión correspondiente:
$I(x) = (7 – 0,5x) . x$ aplicando propiedad distributiva obtenemos

$\mathbf{I(x) = 7x – 0,5x^2}$ expresión que nos permite calcular el ingreso

Hemos obtenido esta expresión multiplicando dos polinomios. ¿Puede usted identificar cuáles? Anótelos en su carpeta e indique para cada uno de ellos cuál es su grado, su coeficiente principal y su término independiente. Si tiene alguna dificultad consulte con su tutor.

Para calcular la ganancia debemos restar el costo a los ingresos:
$G(x) = I(x) - C(x)$

Reemplazando el costo y los ingresos por sus respectivas expresiones obtenemos:
$G(x) = 7x - 0{,}5x^2 - (8 + 1{,}2x)$ eliminando el paréntesis

$G(x) = 7x - 0{,}5x^2 - 8 - 1{,}2x$ agrupando obtenemos
$G(x) = 5{,}8x - 0{,}5x^2 - 8$ expresión que nos permite calcular la ganancia

Hemos obtenido esta expresión restando dos polinomios. ¿Puede usted identificar cuáles? Anótelos en su carpeta e indique para cada uno de ellos cuál es su grado, su coeficiente principal y su término independiente. Si tiene alguna dificultad consulte con su tutor.

ACTIVIDAD 40

Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2$

$Q(x) = 5x^2 + 3x - 1$

$M(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 4$

Obtenga:

a) $R(x) = P(x) + Q(x)$

b) $S(x) = P(x) - Q(x)$

c) $N(x) = P(x) + M(x)$

d) $T(x) = P(x) \cdot Q(x)$

Indique el grado de cada uno de los polinomios anteriores.

Compare el grado de los polinomios dados con el grado de los polinomios obtenidos.

Intente enunciar una conclusión antes de proseguir con la lectura y cópiela en su carpeta.

Conclusiones

1) Si sumamos o restamos dos polinomios de distinto grado, el grado del polinomio obtenido coincide con el grado del polinomio de mayor grado.

2) Si ambos tienen el mismo grado, el grado del polinomio obtenido dependerá del resultado de la operación entre los coeficientes principales de dichos polinomios.

a) Si la suma o resta de los coeficientes principales es cero, se obtendrá un polinomio de grado menor que el grado de los polinomios dados.

b) Si la suma o resta de los coeficientes principales es distinta de cero, se obtendrá un polinomio de igual grado que los polinomios dados.

3) Si multiplicamos dos polinomios el grado del polinomio obtenido será igual a la suma de los grados de los polinomios dados.

Problema 6

Se sabe que la expresión que permite conocer el volumen de un prisma recto de base rectangular es $V(x) = 6x^3 + 19x^2 + 15x$ siendo x la medida de una de sus aristas. Si otra de las aristas es igual a $3x + 5$, hallar la expresión que permite calcular la medida de la tercera arista. Recordar que el volumen de un prisma recto de base rectangular se calcula multiplicando las tres aristas.

:I Intente resolver el problema antes de proseguir con la lectura**.**
:I Compare su resolución con las que le proponemos a continuación:

$V(x) = A(x) . B(x) . C(x)$ siendo A, B y C las expresiones de cada una de las aristas.
Reemplazando el volumen y dos de las aristas por sus expresiones correspondientes se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccc} V(x) & = & A(x) & . & B(x) & . & C(x) \\ 6x^3 + 19x^2 + 15x & = & x & . & (3x + 5) & . & C(x) \end{array}$$

multipliquemos $A(x) . B(x)$

$6x^3 + 19x^2 + 15x = (3x^2 + 5x) . C(x)$ **(1)**

Debemos encontrar C (x) o sea un polinomio que multiplicado por $3x^2 + 5x$ de por resultado $6x^3 + 19x^2 + 15x$

Para ello podemos proceder de la siguiente forma:

Calculemos primero cuál debe ser el grado de C (x).

Para ello debemos tener en cuenta que cuando se multiplican dos polinomios, en este caso C (x) y $3x^2 + 5x$, el grado del polinomio obtenido será igual a la suma de los grados de esos polinomios que se multiplicaron.
Veamos que sucede en nuestro caso.

El grado de V (x) es 3, por lo tanto, la suma de los grados de C(x) y $3x^2 + 5x$ debe ser 3.
Y como el grado de $3x^2 + 5x$ es 2, entonces el grado de C (x) debe ser 1

Hemos avanzado un poco. Todavía no conocemos la expresión de C (x) pero ya sabemos que tiene que ser un polinomio de primer grado.

Escribamos, entonces, la expresión general de un polinomio de primer grado. Para ello recordemos que las funciones lineales son funciones polinómicas de primer grado y tienen por fórmula f (x) = a x + b

Por lo tanto podemos escribir C (x) = a x + b y reemplazar esta expresión en **(1)**

$6x^3 + 19x^2 + 15x = (3x^2 + 5x)(ax + b)$

Aplicando la propiedad distributiva se obtiene:

$6x^3 + 19x^2 + 15x = 3ax^3 + 3bx^2 + 5ax^2 + 5bx$

Agrupando los términos semejantes obtenemos:

$6x^3 + 19x^2 + 15x = 3ax^3 + (3b + 5a)x^2 + 5bx$

Nos ha quedado una igualdad entre dos polinomios. Para que estos dos polinomios sean iguales todos los coeficientes de los términos semejantes deben ser iguales. Por lo tanto se deben cumplir simultáneamente las siguientes condiciones:
$6 = 3a$ porque 6 y 3 a son los coeficientes de los términos cuya parte literal es x^3
$19 = 3b + 5a$ porque 19 y 3b + 5 a son los coeficientes de los términos cuya parte literal es x^2
$15 = 5b$ porque 15 y 5 b son los coeficientes cuya parte literal es x

Despejando se obtiene:
a = 2
b = 3

Reemplazando estos valores en la expresión de C (x) se obtiene
C (x) = 2 x + 3

Ahora vamos a proponerle otra forma de resolución.

Volvamos a considerar la expresión **(1)**

$6x^3 + 19x^2 + 15x = (3x^2 + 5x) \cdot C(x)$

Podemos obtener C (x) realizando la siguiente división:

$(6x^3 + 19x^2 + 15x) : (3x^2 + 5x) = C(x)$

Necesitamos disponer de un método para dividir polinomios. Antes de proseguir recordemos qué sucede con la división de números enteros.
Para ello le pedimos que realice las siguientes divisiones sin usar calculadora y sin utilizar números decimales. Escriba la cuenta en su carpeta. Si no recuerda el método para dividir números puede consultar el libro …. Si no lo tiene puede solicitárselo a su tutor.

300 : 12 =   y   659 : 21 =

Recordemos que dividir un número entero **a,** por otro número entero **b** significa encontrar un número entero **c** tal que **b. c = a**. Si ese número entero existe decimos que se trata de una división exacta. Por ejemplo si a = 300 y b = 12 entonces c = 25 porque 12. 25 = 300

Cuando ese número **c** no existe decimos que la división no es exacta y al dividir los dos números se obtiene un cociente y un resto. Por ejemplo si a = 659 y b = 21, el cociente es 31 y el resto es 8. Podemos escribir: 659 = 21. 31 + 8

Es decir, si se dividen dos números enteros **a** y **b** con $\mathbf{b \neq 0}$, existen siempre dos números **c** y **r** tales que:

$\mathbf{a = b \cdot c + r}$ con $\mathbf{0 \leq r < b}$

En el caso de nuestros ejemplos

300 = 12. 25 + 0   con 0 < 12

659 = 21. 31 + 8   con 0 < 8 < 21

El mecanismo para dividir polinomios es similar al mecanismo para dividir números. Recordemos primero la división de números:

$$\begin{array}{r|l} 6\ 5\ 9 & 2\ 1 \\ \hline -6\ 3 & 3\ 1 \\ \hline 2\ 9 & \\ -2\ 1 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

1) dividimos 6 : 2 y obtenemos 3
2) multiplicamos 3 por 21 y obtenemos 63
3) restamos 65 – 63 y obtenemos 2
4) bajamos el 9 y repetimos los pasos anteriores hasta que el resto sea menor que el divisor

Apliquemos este mecanismo a los polinomios:

$$
\begin{array}{rl}
6x^3 + 19x^2 + 15x & \big|\ 3x^2 + 5x \\
-\ \underline{6x^3 + 10x^2} \qquad & \quad 2x + 3 \\
9x^2 + 15x & \\
-\ \underline{9x^2 + 15x} & \\
0 &
\end{array}
$$

1) dividimos $6x^3$ por $3x^2$ y obtenemos $2x$

2) multiplicamos $2x$ por $3x^2 + 5x$ y obtenemos $6x^3 + 10x^2$

3) restamos del dividendo el resultado del paso anterior y obtenemos $9x^2$

4) bajamos $15x$ y repetimos los pasos anteriores hasta que el grado del polinomio resto sea menor que el grado del polinomio divisor o el resto sea 0

A continuación utilice este mecanismo para realizar la siguiente Actividad.

ACTIVIDAD 41

Dados los siguientes polinomios: A (x) = 3x3 – $2x^2 + x - 1$, B (x) = $x^2 - 4x + 2$

y C (x) = $3x - 5$ realice las siguientes operaciones:

a) A (x) : B (x) =

b) A (x) : C (x) =

¿Qué conclusión puede sacar comparando el grado del polinomio resto con el grado del polinomio divisor?

A modo de síntesis

Al dividir dos polinomios de A (x) y B (x) existirán dos polinomios C (x) y R (x) tales que A (x) = B (x) **.** C (x) + R (x) y donde el grado de R (x) será menor que el grado de B (x) o R (x) = 0

Cuando R (x) = 0 decimos que A (x) es divisible por B (x) o que B (x) es divisor de A (x)

Veamos ahora un caso especial de división.

Supongamos que A (x) = $2x^3 + 4x^2 - 6x + 5$ y B (x) = $x - 2$
Hagamos la división A (x): B (x) siguiendo los pasos indicados en la página anterior:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \mathbf{2\,x^3 + 4\,x^2 - 6\,x + 5} & \mathbf{x - 2} \\
- & 2\,x^3 - 4\,x^2 & 2\,x^2 + 8\,x + 10 = C(x) \text{ cociente} \\
\hline
 & 8\,x^2 - 6\,x & \\
- & 8\,x^2 - 16\,x & \\
\hline
 & 10\,x + 5 & \\
- & 10\,x - 20 & \\
\hline
 & 25 = R(x) \text{ resto} &
\end{array}
$$

Hemos obtenido C (x) = $2x^2 + 8x + 10$ y R (x) = 25

En muchas ocasiones será necesario dividir un polinomio cualquiera por otro de la forma x – a. Existe una forma más sencilla para dividir polinomios en los casos en los que el divisor sea de la forma x – a cuya creación se le atribuye a un matemático italiano llamado Paolo Ruffini.

Veamos cómo aplicar este procedimiento para realizar la división anterior. En este caso queremos dividir A (x) = $2x^3 + 4x^2 - 6x + 5$ por B (x) = x – 2 donde
A (x) es un polinomio cualquiera y B (x) es de la forma x – a siendo a = 2

Consiste en trabajar sólo con los valores que aparecen en color en la división anterior.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 2 & 4 & -6 & 5 & \text{coeficientes de A (x)} \\
 & & + & + & + & \\
a = 2 & & 4 & 16 & 20 & \\
\hline
\text{x} & 2 & \text{x}\ \ 8 & \text{x}\ \ 10 & \text{x}\ \ 25 &
\end{array}
$$

1. Ubicamos los coeficientes de A (x): 2 4 -6 5
2. Bajamos el primer coeficiente, 2
3. Multiplicamos el primer coeficiente por **a** que en este caso vale 2, 2. 2 = 4 lo colocamos bajo el segundo coeficiente, 4 y sumamos 4 + 4 = 8
4. Repetimos el paso anterior con los siguientes coeficientes hasta terminar. El último número obtenido es el resto, en este caso 25. Los números anteriores, en este caso 2, 8 y 10 son los coeficientes del polinomio cociente, que tendrá un grado menos que el grado del polinomio que hemos dividido. En este caso como el grado de A (x) era 3, el grado de C (x) será 2. Por lo tanto C (x) = $2x^2 + 8x + 10$

Calculemos ahora el valor numérico de A (x) para x = 2

$A(x) = (2x^3 + 4x^2 - 6x + 5)$

$A(2) = (2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 5)$

$A(2) = 25$

Vemos que, en este caso, el valor numérico del polinomio A (x) para x = 2 coincide con el resto de dividir A (x) por x – 2

Realice usted la siguiente Actividad.

ACTIVIDAD 42

a) Divida $P(x) = x^2 + 4x - 1$ por $x - 1$ utilizando la regla de Ruffini y luego calcule el valor numérico de P(x) para x = 1

b) Divida $Q(x) = 2x4 - 3x^2 + 2x - 6$ por $x + 3$ utilizando la regla de Ruffini y luego halle el valor numérico de Q (x) para x = - 3

c) Compare los restos de las divisiones realizadas con los respectivos valores numéricos de los polinomios que se dividieron. ¿Qué observa? Anote sus conclusiones.

¿Sucederá siempre que el valor numérico de un polinomio en x = a coincide con el resto de dividir ese polinomio por x – a?

Ya hemos visto en la primera Unidad de este Módulo que para poder asegurar que una propiedad se cumple siempre no basta con comprobarla para algunos casos particulares sino que debemos verificarla en forma genérica.

Supongamos que B (x) = x – a y A (x) es un polinomio cualquiera.
Si dividimos A (x) por B (x) obtendremos C (x) y R (x) tales que:
$A(x) = B(x) \cdot C(x) + R(x)$

Donde el grado de R (x) debe ser menor que el grado de B (x). Dado que el grado de B (x) es 1, el grado de R (x) será 0 o R (x) = 0, por lo tanto R (x) será un número real.

Reemplazando
$A(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$

Cuando $x = a$

$A(a) = (a - a) \cdot C(a) + R$

$A(a) = 0 + R$

$A(a) = R$

Ahora sí podemos asegurar que:

El resto de dividir un polinomio $A(x)$ cualquiera por otro de la forma $x - a$ coincide con el valor numérico del polinomio para $x = a$. Esta propiedad es conocida como Teorema del resto.

Además, ya vimos que, si para un determinado valor de x, el valor numérico del polinomio era igual a cero, ese valor era un cero o raíz del polinomio.
O sea, si $A(a) = 0$, entonces **a** es una raíz o cero del polinomio $A(x)$

Por otra parte, $A(a) = R$. (por el teorema del resto)

Entonces podemos afirmar que:

Cualquier polinomio $A(x)$ será divisible por $x - a$ (el resto de la división es cero) si y sólo si a es una raíz de $A(x)$

ACTIVIDAD 43

Utilice el Teorema del Resto para encontrar el resto de dividir $P(x) = 4x\,3 + 5x^2 - 2x + 1$ por $Q(x) = x + 4$ y por $S(x) = x - 2$, sin hacer la división.

ACTIVIDAD 44

Encuentre en cada caso el valor de m para que el polinomio P (x) sea divisible por Q (x), siendo:

a) $P(x) = x^2 + 2x + 4x3 - m$ y $Q(x) = x - 1$

b) $P(x) = 4x3 - 2x + 3m$ y $Q(x) = x + 3$

ACTIVIDAD 45

Indique si $P(x) = 3x4 - 2x3 + 2x - 3$ es divisible por cada uno de los polinomios que se indican a continuación:

a) $Q(x) = x + 1$

b) $R(x) = x - 3$

c) $T(x) = x - 1$

d) $M(x) = x + 2$

ACTIVIDAD 46

Señale cuáles de los siguientes valores de x corresponden a raíces del polinomio:

$P(x) = x3 - 3x^2 - 10x + 24$

X = 1   x = 2   x = 3   x = 4   x = - 1   x = -2   x = - 3

:::.. Funciones polinómicas

En el módulo de funciones usted ya ha trabajado con algunas funciones polinómicas. Por ejemplo con funciones lineales que son funciones polinómicas de primer grado y con funciones cuadráticas que son funciones lineales de segundo grado. En este módulo vamos a profundizar el trabajo con funciones cuadráticas. Le aconsejamos releer lo trabajado sobre funciones cuadráticas en el módulo de funciones antes de proseguir con la lectura.

:::.. Funciones polinómicas de segundo grado: funciones cuadráticas

Problema 7
Se patea una pelota, desde el suelo hacia arriba. La altura que alcanza medida desde el suelo en función del tiempo está dada por la siguiente fórmula:

$$h(t) = -2t^2 + 6t + 8$$

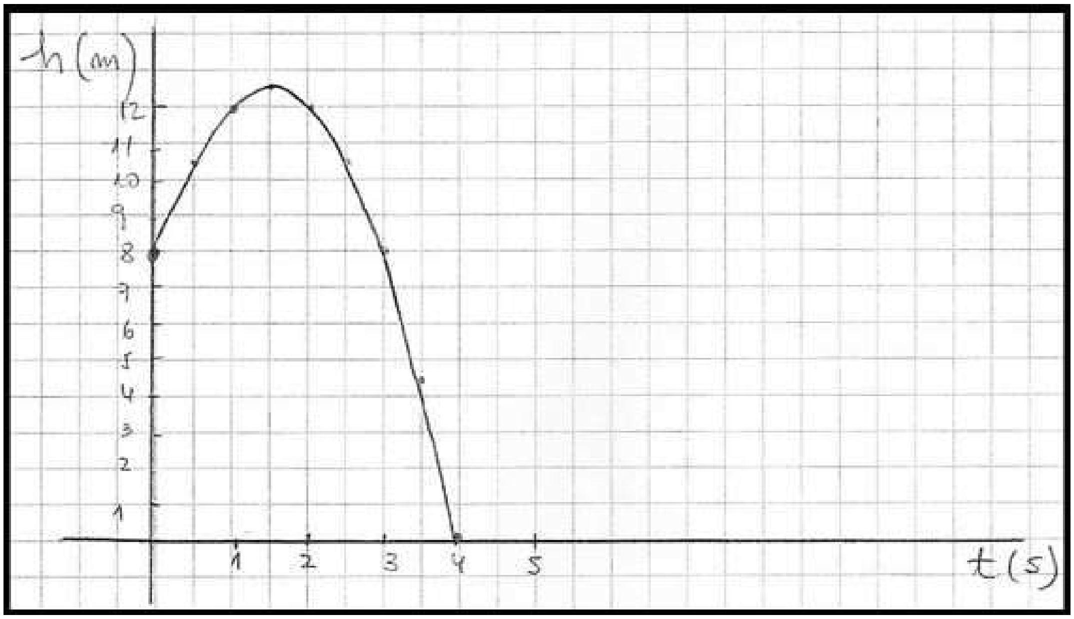
donde h representa la altura, medida en metros y t el tiempo, medido en segundos.

1. ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?
2. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?
3. Realice un gráfico de la función.

Sugerencia: Como en este problema la función viene dada por su fórmula, una forma de resolverlo es realizar primero la gráfica y a continuación responder las otras preguntas sacando la información del gráfico. Para graficar podríamos armar una tabla y con esos valores construir la gráfica.

Tiempo	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Altura	8	10,5	12	12,5	12	10,5	8	4,5	0

Intente resolver este problema y luego compare su resolución con la que le proponemos a continuación.



Para responder el punto 1 debemos tener en cuenta que en el momento en que la pelota llega al suelo su altura es cero. Esto corresponde a los puntos donde la gráfica corta al eje x. Observando la gráfica vemos que esto se verifica para $t = 4$.

Observando el gráfico también podemos responder al punto 2 pues la máxima altura corresponde a $h = 12{,}5$

Pero también podemos trabajar algebraicamente. Veamos cómo.

En primer lugar recordemos que las funciones cuadráticas tienen por fórmula general
$f(x) = a x^2 + b x + c$

Si comparamos con la fórmula del problema observamos que esta corresponde a una función cuadrática en la cual $a = -2$, $b = 6$ y $c = 8$
Si queremos saber cuánto tarda en llegar al suelo (punto 1) debemos calcular el momento en que la altura es cero. O sea, calcular los valores de t para los cuales h es cero. Esto significa hallar los ceros o raíces de la función.

Si queremos hallar la altura máxima (punto 2) debemos encontrar la coordenada **y** del vértice.

Veamos cómo resolver el punto 1.

Hallar las raíces de esta función significa resolver la siguiente ecuación:

$$0 = -2t^2 + 6t + 8$$

Como aún no disponemos de una forma para despejar t directamente, deberemos encontrar una expresión equivalente a la dada de la cual podamos despejar t.

Recordemos que $- 2 t^2 + 6 t + 8$ será divisible por un polinomio de la forma $t – a$ si **a** es una raíz del polinomio.

Entonces podemos escribir:

$(- 2 t^2 + 6 t + 8) : (t – a) = C (t)$

Despejando nos queda:
$(- 2 t^2 + 6 t + 8) = (t – a) . C (t)$ **(1)**

Con lo cual $- 2 t^2 + 6 t + 8$ nos queda descompuesto en el producto de dos polinomios, uno de ellos de la forma $t – a$ siendo **a** una raíz del polinomio.

Ahora debemos encontrar el valor de **a** y la expresión correspondiente a **C (t)**

Como a es una raíz del polinomio, teniendo en cuenta el Teorema del Resto, el valor numérico de ese polinomio para **t = a** debe ser cero.

Busquemos algún valor de t para el cual $- 2 t^2 + 6 t + 8$ sea cero. Para esto procedamos por tanteo. Le vamos dando distintos valores a t hasta encontrar uno para el cual la cuenta dé cero.
Por ejemplo:

Si $t = 1$ $h (1) = - 2 .1^2 + 6. 1 + 8 = 12$

Si $t = 2$ $h (2) = - 2 .2^2 + 6 . 2 + 8 = 12$

Si $t = - 1$ $h (- 1) = - 2 . (- 1)^2 + 6 . (- 1) + 8 = 0$

Vemos que para $t = - 1$ el valor numérico de $h (t)$ es cero, por lo tanto $t = - 1$ es una raíz de ese polinomio. Hemos encontrado el valor de **a** que buscábamos.
Reemplacemos ese valor de **a** en la expresión **(1)**

$(- 2 t^2 + 6 t + 8) = (t – (- 1)) . C (t)$

$(- 2 t^2 + 6 t + 8) = (t + 1) . C (t)$

Ahora debemos encontrar la expresión correspondiente a C (t). Para ello debemos resolver la siguiente división:

$(- 2 t^2 + 6 t + 8) : (t + 1) = C (t)$

Hagamos la división

$$
\begin{array}{l|l}
\mathbf{-2t^2 + 6t + 8} & \mathbf{t+1} \\ \cline{2-2}
-\ \underline{-2t^2 - 2t} & -2t + 8 = C(t) \text{ cociente} \\
\qquad\quad 8t + 8 & \\
\qquad -\ \underline{8t + 8} & \\
\qquad\qquad\quad 0 = R(t) \text{ Resto} &
\end{array}
$$

Por último reemplacemos C (t) por la expresión hallada:

$(- 2 t^2 + 6 t + 8) = (t + 1) . (-2 t + 8)$

Volvamos ahora a la ecuación que queríamos resolver.

$0 = (- 2 t^2 + 6 t + 8)$

Reemplazando nos queda:
$0 = (t + 1) . (-2 t + 8)$

Sacando –2 de factor común del segundo paréntesis se obtiene:

$0 = - 2 (t + 1) (t – 4)$

Hemos obtenido una expresión de la cual podemos despejar t.

Como $- 2. (t + 1). (t – 4)$ es el producto de tres factores, este producto será igual a cero si alguno de esos tres factores es cero. (Recuerde que cualquier número multiplicado por cero es igual a cero).

- 2 es distinto de cero, por lo tanto deberá cumplirse que $t + 1= 0$ o $t – 4 = 0$

Despejando t de cada una de las expresiones anteriores obtenemos, respectivamente $t = -1$ y $t = 4$ que son las soluciones de la ecuación.

Ahora, volviendo a nuestro problema, debemos interpretar los dos resultados obtenidos al resolver la ecuación.
Por el contexto del problema, el valor negativo carece de sentido. Por lo tanto la pelota tardará 4 segundos en llegar al suelo.

En el problema anterior hemos pasado de la expresión :

$h (t) = - 2 t^2 + 6 t + 8$

a otra equivalente :

$h(t) = -2(t+1)(t-4)$

La primera expresión corresponde a la forma $\mathbf{f(x) = a x^2 + b x + c}$ llamada **expresión general** de la función cuadrática. La segunda corresponde a la forma
$\mathbf{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ llamada **expresión factorizada** de la función donde x_1 y x_2 son las raíces de la función y **a** es el coeficiente principal del polinomio.

Existe otra forma de hallar las raíces de un polinomio de segundo grado, que consiste en la aplicación de una fórmula.
A continuación vamos a desarrollar el proceso por el cual se llega a esta fórmula.
Pero tenga en cuenta que no será necesario que usted recuerde todo el proceso. Para la resolución de los problemas bastará con que recuerde la fórmula y la aplique.
Si le resulta muy complicado seguir este desarrollo, consulte con su tutor.

Sea la expresión general $f(x) = a x^2 + b x + c$ vamos a escribirla de otra forma tal que pueda despejarse x

$f(x) = a x^2 + b x + c = 0$

Sacamos **a** de factor común.

$$a(x^2 + b/a\, x + c/a) = 0$$

dividimos ambos miembros por a.

$$x^2 + b/a\, x + c/a = 0$$

Si multiplicamos y dividimos un término por un mismo número el resultado no cambia. En este caso dividimos y multiplicamos el segundo término por 2.

$$x^2 + 2 \,.\, (b/2a)\, x + c/a = 0$$

Y si sumamos y restamos un mismo término a uno de los miembros de una igualdad, esta se mantiene. En este caso sumamos y restamos $(b/2a)^2$

$$x^2 + 2 \,.\, (b/2a)\, x + (b/2a)^2 - (b/2a)^2 + c/a = 0$$

Los tres primeros términos corresponden al desarrollo del cuadrado de un binomio. Los reemplazamos, entonces, por su expresión equivalente.

$$(x + b/2a)^2 - (b/2a)^2 + c/a = 0$$

Ahora podemos despejar x.

$$(x + b/2a)^2 = (b/2a)^2 - c/a$$

Distribuimos el cuadrado que aparece en el segundo miembro.

$(x + b/2a)^2 = b^2/4a^2 - c/a$

Sacamos común denominador 4 a² en el segundo miembro.

$$(x + b/2a)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$(x + b/2a) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Obtenemos dos valores de x, uno utilizando el valor positivo de la raíz cuadrada y otro utilizando el valor negativo.

$$x_1 = +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - b/2a \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - b/2a \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hemos hallado una fórmula a partir de la cual encontrar los valores de las raíces conociendo los coeficientes de la forma general de la función cuadrática.

Ahora veamos cómo aplicar estas fórmulas para resolver nuestro problema.

Recordemos que la expresión que permite calcular la altura en función del tiempo es: $h(t) = -2t^2 + 6t + 8$

donde $a = -2$, $b = 6$ y $c = 8$

Reemplacemos estos valores en la fórmula correspondiente:

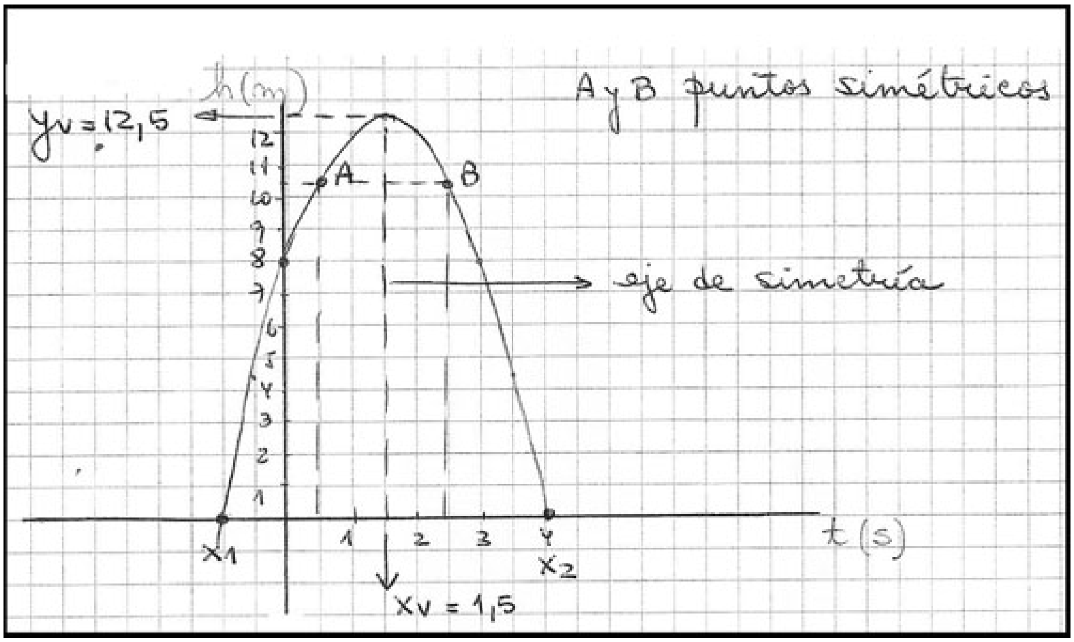
$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{(-6)^2 - 4.(-2).8}}{2.(-2)} = \frac{-6 + \sqrt{36 + 64}}{-4} = \frac{-6 + \sqrt{100}}{-4} = \frac{-6 + 10}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{(-6)^2 - 4.(-2).8}}{2.(-2)} = \frac{-6 - \sqrt{36 + 64}}{-4} = \frac{-6 - \sqrt{100}}{-4} = \frac{-6 - 10}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4$$

Hemos obtenido dos raíces $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$

Veamos cómo resolver el punto 2, o sea hallar la altura máxima alcanzada.

Para calcular la altura máxima alcanzada debemos hallar la coordenada **y** del vértice de la parábola, que llamaremos $\mathbf{y_v}$. Hay distintas formas de encontrar las coordenadas del vértice de una parábola. Una de ellas consiste en trabajar con dos puntos simétricos cualesquiera. Esta forma ya fue trabajada en el módulo de funciones. Puede usted releerlo en el apartado correspondiente a funciones cuadráticas. También podríamos utilizar las raíces calculadas en el punto anterior para calcular la coordenada **x** del vértice, que llamaremos $\mathbf{x_v}$, pues las raíces son puntos simétricos. Recordemos que los puntos simétricos son aquellos que tienen distinta coordenada **x** pero la misma coordenada **y** . Gráficamente son puntos que están a la misma altura, uno a cada lado del eje de simetría de la parábola y a la misma distancia de ese eje.



En ese caso basta con sumar las raíces x_1 y x_2 y dividir ese resultado por dos

$x_v = (x_1 + x_2) : 2$

Utilizando los datos de nuestro problema obtendríamos:

$x_v = (- 1 + 4) : 2 = 3 : 2 = 1,5$

Para hallar y_v se calcula h (x_v) o sea el valor numérico de h (t) para t = x_v. Para ello se reemplaza el valor hallado de x_v en la fórmula de la función dada.

Recordando que la expresión de nuestra función era:

$h (t) = - 2 t^2 + 6 t + 8$

Reemplacemos t por el valor de y_v o sea por 1,5

$h(y_v) = -2\,(1{,}5)^2 + 6 \,.\, 1{,}5 + 8 = 12{,}5$

Hemos hallado el valor de la altura máxima, que es de 12,5 metros.

Existe también una fórmula que permite hallar las coordenadas del vértice sin tener que hallar previamente las raíces. Veamos cómo se obtiene esta fórmula. Nuevamente le recordamos que no es necesario que usted recuerde todo el desarrollo que conduce a la obtención de la fórmula, simplemente deberá recordar la fórmula y aplicarla cuando lo considere conveniente.

Veamos cómo se llega a esta fórmula. Debemos partir de la ecuación dada en forma general, $f(x) = a x^2 + b x + c$ **(2)**

Podemos observar que, si en esta fórmula se reemplaza x por cero, se obtiene:
$f(0) = a \,.\, 0^2 + b \,.\, 0 + c = c$

La función toma valor c cuando la x vale cero.
Por lo tanto el punto (0; c) es un punto de la parábola. Hallemos el simétrico de este punto, o sea encontremos el otro valor de x para el cual la función también toma valor c. Estamos, pues buscando otro valor para el cual $f(x) = c$

Reemplazando $f(x)$ por c en la expresión **(2)** nos queda:

$a x^2 + b x + c = c$ despejando

$a x^2 + b x + c - c = 0$

$a x^2 + b x = 0$ sacando factor común x

$x\,(a x + b) = 0$

Como este producto debe dar cero, o $x = 0$ o $a x + b = 0$

Despejando obtenemos $x = 0$ o $x = -b/a$

Por lo tanto $x = 0$ y $x = -b/a$ son los dos valores de x para los cuales $f(x) = c$

Hemos encontrado, algebraicamente, dos puntos simétricos.
Calculemos ahora las coordenadas del vértice como hicimos antes, sumemos los puntos simétricos y dividamos por dos.

$$x_v = \frac{0 + (-b/a)}{2}$$

$x_v = -b/2a$

Hemos encontrado una expresión que nos permite calcular el x_v si conocemos los coeficientes de la forma general de la función cuadrática, o sea los coeficientes de la expresión **(2)**

Para hallar el valor de y_v procedemos como se indicó anteriormente, reemplazamos el valor de x_v en la función dada.

$y_v = f(x_v)$

Apliquemos estas fórmulas a los datos de nuestro problema. Recordemos nuestra función: $h(t) = -2t^2 + 6t + 8$ donde $a = -2$, $b = 6$ y $c = 8$
Reemplacemos estos valores en la fórmula: $x_v = -b / 2a$

$x_v = -6 / 2.(-2) = -6 / (-4) = 1{,}5$

Hemos obtenido la coordenada x del vértice.

Ahora tomemos este valor y reemplacémoslo en la función:

$y_v = f(x_v) = -2\,(1{,}5)^2 + 6 \cdot 1{,}5 + 8 = 12{,}5$

Hemos obtenido la coordenada y del vértice, que en el caso de nuestro problema representa la altura máxima alcanzada.

Conclusión

- Las raíces de una función cuadrática pueden calcularse mediante la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

x 1,2 significa que la misma fórmula permite calcular x1 y x2. En un caso hay que sumar el resultado del la raíz cuadrada y en el otro hay que restarlo.

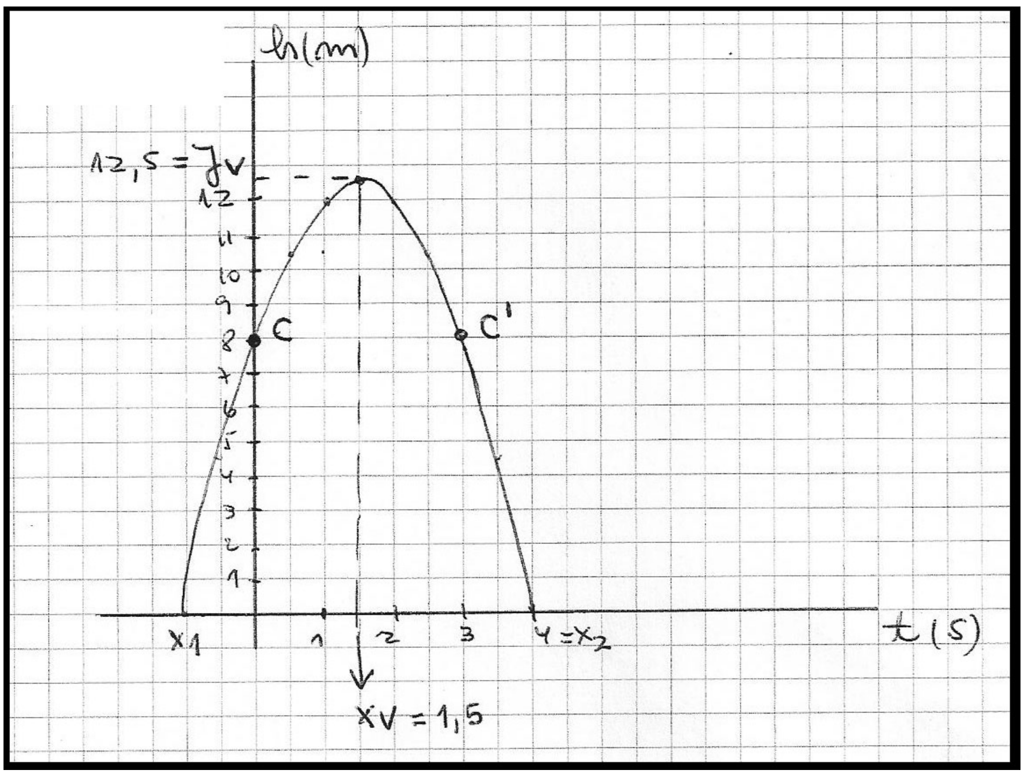
- Las coordenadas del vértice de una parábola pueden calcularse mediante la fórmula

$$V = (-b / 2a \,;\, f(-b / 2a))$$

Veamos cómo resolver el punto 3 sin hacer una tabla de valores. Para ello utilizaremos los puntos que fuimos calculando en los puntos anteriores y los iremos marcando en el gráfico:

a) las raíces (sobre el eje x) En nuestro caso los puntos (- 1, 0) y (4 , 0)
b) el vértice En nuestro caso el punto (1,5 ; 12,5)
c) el punto (0, c) sobre el eje y. En nuestro caso el punto (0 , 8)
d) el simétrico de (0, c) con respecto al eje de simetría de la parábola, o sea a la recta vertical que pasa por el vértice.

Luego unimos esos puntos.
En el caso de nuestro problema:



Veamos ahora algunos casos especiales.
Ejemplo 1

Supongamos que queremos graficar la siguiente función:

$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$

Calculemos primero las raíces utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso a = 2, b = 4 y c = 2

Reemplacemos estos valores en la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.\,2.\,2}}{2.2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2.2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2.\,2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 0}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 0}{4} = -1$$

Obtenemos el mismo valor para x_1 y para x_2. Esto significa que la función tiene una sola raíz, o sea un solo punto donde la parábola toca al eje x.

Calculemos ahora el vértice utilizando también las fórmulas correspondientes.

Hallemos primero la coordenada x del vértice
xv = - b / 2a

Reemplazando por los valores correspondientes se obtiene.

xv = - 4 / 2.2

xv = - 4 / 4 = - 1

Hallemos ahora la coordenada **y** del vértice reemplazando el valor hallado de **xv** en la función dada.

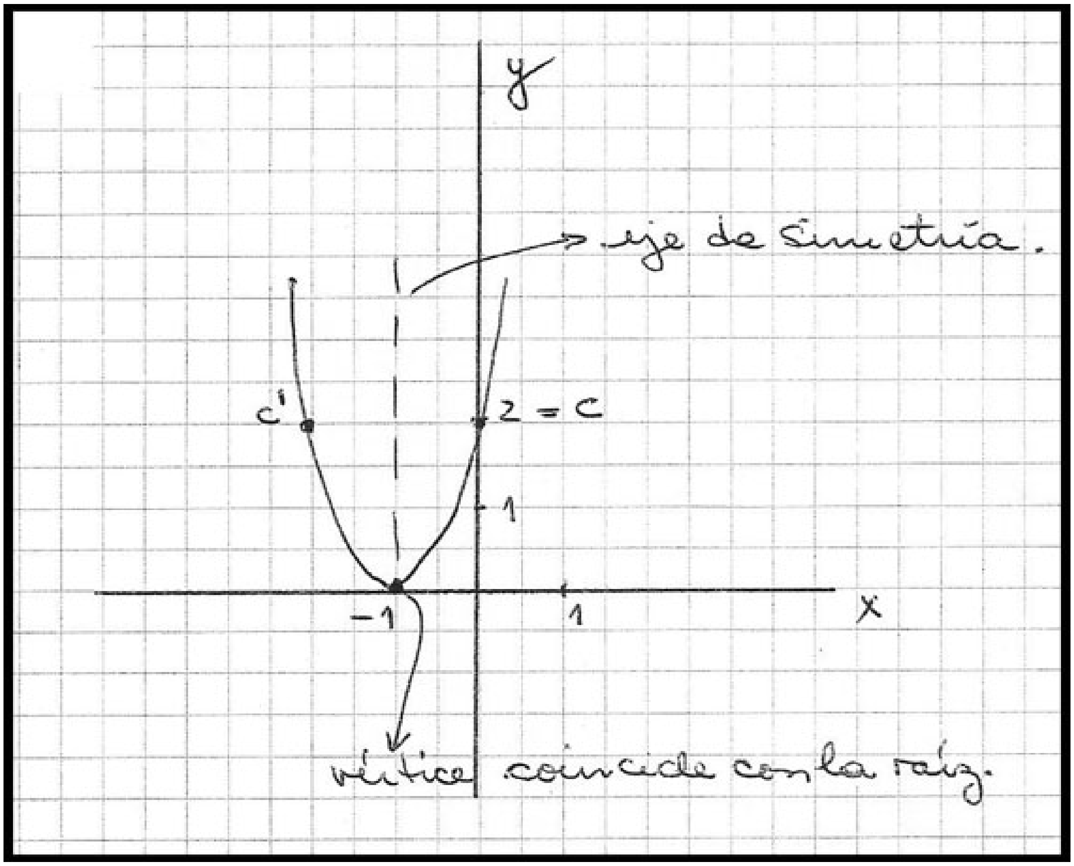
$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$

$yv = 2 \,.\, (-1)^2 + 4(-1) + 2 = 2 \,.\, 1 - 4 + 2 = 0$

El vértice, por lo tanto estará en el punto (- 1 ; 0) Este punto es, además, la raíz de la función.

Grafiquemos ahora la función, marcando:

a) la raíz sobre el eje x. En este punto estará también el vértice.
b) El punto (0,c) sobre el eje y. En nuestro caso el punto (0, 2)
c) El simétrico de (0, 2) con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice.



Ejemplo 2

Supongamos que queremos graficar la siguiente función:

$f(x) = x^2 + x + 2$

Calculemos primero las raíces utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso a = 1, b = 1 y c = 2

Reemplacemos estos valores en la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.2}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2.1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2.1}$$

En este caso debemos calcular la raíz cuadrada de un número negativo. Como la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real, y por lo tanto no podemos calcularla llegamos a la conclusión de que la función no tiene raíces. Gráficamente esto significa que la parábola no cortará al eje **x** en ningún punto.

Calculemos ahora el vértice utilizando también las fórmulas correspondientes.

Hallemos primero la coordenada **x** del vértice
$xv = - b / 2a$

Reemplazando por los valores correspondientes se obtiene.

$xv = - 1 / 2.1$

$xv = - 1 / 2$

Hallemos ahora la coordenada **y** del vértice reemplazando el valor hallado de **xv** en la función dada.

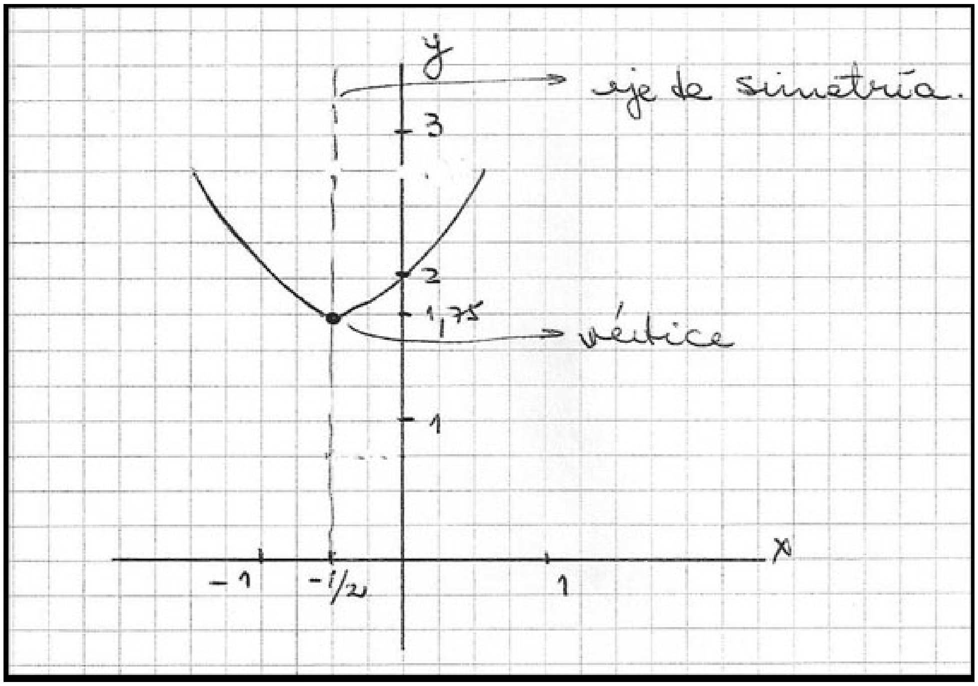
$f(x) = x^2 + x + 2$

$yv = (-1/2)^2 + (-1/2) + 2 = 1/4 - 1/2 + 2 = 7/4$

El vértice, por lo tanto estará en el punto (- 1/2 ; 7/4)

Grafiquemos ahora la función, marcando:

a) El vértice. En nuestro caso el punto (- 1/2 ; 7/4)
b) El punto (0,c) sobre el eje y. En nuestro caso el punto (0, 2)
c) El simétrico de (0, 2) con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice.



Nótese que al aplicar la fórmula para calcular las raíces pueden presentarse tres situaciones:

a) Que el resultado sea un número positivo, en cuyo caso tengo dos soluciones, $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$. La función tiene dos raíces y su gráfica corta al eje x en dos puntos, como en el caso del problema 7
b) Que el resultado sea cero, en cuyo caso tengo una sola solución, pues $x_1 = x_2$. La función tiene una sola raíz y su gráfica toca al eje **x** en un solo punto, como en el caso del ejemplo 1.
c) Que el resultado sea un número negativo, en cuyo caso no existe solución pues no hay ningún número real que sea solución de una raíz cuadrada negativa. La función no tiene raíces y su gráfica no corta al eje x, como en el caso del ejemplo 2.
d)

ACTIVIDAD 47

En el Módulo de funciones usted ya trabajó con el siguiente problema.

El INTA determinó experimentalmente que si x es el número de árboles por encima de 50 en una hectárea, el total de la producción p está dado por la fórmula.

$$p = - x 2 + 30 x + 30\,000$$

El chacarero quiere saber, naturalmente, hasta cuántos árboles puede plantar por encima de 50 para que su producción total no empiece a disminuir, y cuál sería la producción máxima que podría obtener.

Relea sus apuntes y vea cómo resolvió este problema.
Ahora le pedimos que resuelva este problema algebraicamente y compare sus respuestas con las que obtuvo anteriormente.

Responda, además, la siguiente pregunta: ¿A partir de qué cantidad de árboles la producción se hace cero?

ACTIVIDAD 48

A continuación le presentamos otro problema con el cual usted ya trabajó en el módulo de funciones.

En una isla se introdujeron ciervos. Con recuentos durante varios años se estableció que el número de animales en función del tiempo transcurrido desde su introducción está dado por la fórmula:

$n = -t^2 + 21t + 100$

siendo n el número de ciervos

t el tiempo en años

Determine a partir de qué momento la cantidad de animales comenzó a disminuir, y cuál fue la máxima cantidad de ciervos que llegó a haber en la isla.

Relea sus apuntes y vea cómo lo resolvió.

Ahora resuelva algebraicamente los puntos anteriores y compare sus respuestas.

Por último responda la siguiente pregunta:

¿Se extingue en algún momento la población de ciervos? Si es así, ¿cuándo?

:::.. Funciones polinómicas de grado mayor que 2

Problema 8

¿Cuál debe ser el valor x de la arista del prisma del problema 6 para que el volumen sea de 378 cm^3?

Necesitamos encontrar para qué valor de x, la expresión: $6x^3 + 19x^2 + 15x$ es igual a 378. O sea, resolver la ecuación:

$6x^3 + 19x^2 + 15x = 378$, que es equivalente a $6x^3 + 19x^2 + 15x - 378 = 0$

Para ello debemos encontrar las raíces de un polinomio de tercer grado. Veamos cómo proceder.

Trabajemos primero con algunos ejemplos más sencillos

Ejemplo 1
Supongamos que queremos hallar las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Eso significa que tenemos que resolver la ecuación

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

Como no disponemos de una fórmula para resolver esta ecuación, debemos encontrar una expresión equivalente a partir de la cual poder despejar x

sacando x de factor común obtenemos:

$x(x^2 - x - 2) = 0$

Hemos obtenido una expresión equivalente a la dada y que es igual al producto de dos factores
x y $x^2 - x - 2$. Como ya dijimos, para que el producto de dos factores sea igual a cero, alguno de esos factores debe ser igual a cero. Por lo tanto $x = 0$ o
$x^2 - x - 2 = 0$

Como $x^2 - x - 2$ es una función cuadrática aplicando la fórmula para hallar las raíces obtenemos $x_1 = -1$ $x_2 = 2$

Aplique usted la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y verifique que estos valores son correctos.

Hemos encontrado tres soluciones para la ecuación dada:
$x_1 = -1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 0$

Recordando que la forma factorizada de una función cuadrática es:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

podemos escribir $x^2 - x - 2 = (x + 1) \cdot (x - 2)$

Como $P(x) = x\ (x^2 - x - 2)$

Reemplazando obtenemos $P(x) = x.\ (x + 1) \cdot (x - 2)$ que es la forma factorizada del polinomio dado.

Ejemplo 2
Hallar las raíces de $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

En este caso debemos resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$
Esto significa encontrar los valores de x que hacen cero al polinomio dado.

Para ello tengamos en cuenta que el polinomio dado será divisible por otro polinomio de la forma $x - a$ si a es una de las raíces del polinomio.

Con lo cual podemos escribir

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - a) = c(x)$ con resto $R(x) = 0$

Ahora debemos emplear un procedimiento similar al que utilizamos para resolver la ecuación cuadrática. Si necesita relea la explicación de la pag…..
Necesitamos encontrar una raíz para reemplazar su valor en $x - a$ y poder dividir.
Procedemos por tanteo.
Por ejemplo:
Para $x = 1$ $\quad P(x) = (1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6) = -8$ entonces $x = 1$ no es raíz
Para $x = 2$ $\quad P(x) = (2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6) = 0$ entonces $x = 2$ es raíz.

Reemplazando

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2) = c(x)$ **(3)**

Ahora debemos hacer la división. Como el divisor es de la forma $x - a$ donde **a** vale 2, podemos aplicar la regla de Ruffini.

	1	2	-5	-6	→ Coeficientes del polinomio dado
		+	+	+	
a = 2		2	8	6	
	1	4	3	0	→ Resto

Coeficientes de C (x)

Hemos obtenido C (x) $= x^2 + 4x + 3$

Reemplazando en (3) nos queda

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2) = x^2 + 4x + 3$

Despejando

$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = (x - 2) \cdot (x^2 + 4x + 3)$

Nuevamente hemos escrito el polinomio dado como producto de dos factores:
$(x - 2)$ y $(x^2 + 4x + 3)$

¿Cómo haría usted para encontrar las raíces que faltan?

Compare su respuesta con la que mostramos a continuación.

Debemos encontrar las raíces de $(x^2 + 4x + 3)$

Como se trata de una función cuadrática, aplicamos la fórmula;

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y obtenemos $x_1 = -1$ $x_2 = -3$

Aplique usted la fórmula y verifique estos resultados

Escriba ahora la expresión factorizada del polinomio dado.

Hemos hallado las raíces de P (x) $= x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$x_1 = -1$ $x_2 = -3$ $x^3 = 2$

cuya forma factorizada es P (x) $= (x + 1)(x + 3)(x - 2)$

Resumiendo

Para hallar las raíces de un polinomio de grado 3 procedemos de la siguiente forma:

1) hallamos por tanteo una de las raíces,
2) dividimos el polinomio dado por otro de la forma x – a donde a es la raíz hallada en el punto 1 y obtenemos un polinomio de grado 2,
3) aplicamos la fórmula para calcular las raíces de una función cuadrática al cociente de esa división.

Si el polinomio es de grado mayor que 3 procedemos así:

1) hallamos por tanteo una de las raíces,
2) dividimos el polinomio dado por otro de la forma x – a donde a es la raíz hallada en 1 y obtenemos un polinomio cuyo grado es uno menos que el del polinomio dado.
3) Hallamos por tanteo una raíz del polinomio cociente.
4) Dividimos ese polinomio por otro de la forma **x – a** donde **a** es la nueva raíz hallada.
5) Repetimos los pasos 3 y 4 hasta que el polinomio cociente sea de grado 2.
6) Aplicamos la fórmula para calcular raíces de una función cuadrática al cociente de esa división.

:I Intente, ahora, resolver el problema 8. Compare su respuesta con la que le proponemos a continuación.

Debíamos resolver la ecuación $6x^3 + 19x^2 + 15x – 378 = 0$

Primero buscamos, tanteando, una raíz. Probamos de reemplazar **x** por distintos valores hasta encontrar uno que haga que la cuenta dé cero. Por ejemplo

Si $x = 3$ $\quad 6.\ 3^3 + 19.\ 3^2 + 15.\ 3 – 378 = 162 + 171 + 45 – 378 = 0$

Ahora debemos dividir $6x^3 + 19x^2 + 15x – 378$ por $x – 3$
Aplicamos la regla de Ruffini

	6	19	15	-378
		+	+	+
a = 3		18	111	378
	6	37	126	0

Con lo cual podemos escribir:

$6x^3 + 19x^2 + 15x – 378 = (x – 3)(6x^2 + 37x + 126)$

Ahora debemos encontrar las raíces de $(6x^2 + 37x + 126)$. Como se trata de un polinomio de grado 2 aplicamos la fórmula.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 6$, $b = 37$ y $c = 126$

Vemos que al reemplazar en la fórmula los valores de a, b y c nos queda la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto el polinomio $6x^2 + 37x + 126$ no tiene raíces reales. Con lo cual la única raíz del polinomio dado es $x = 3$.
La respuesta a nuestro problema es que la arista x debe valer 3.

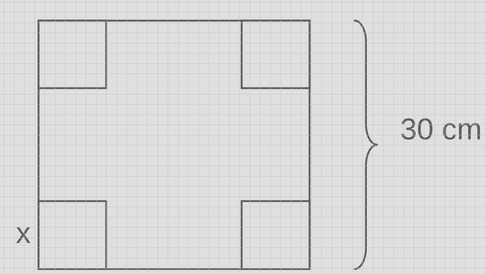
ACTIVIDAD 49

Escriba la forma factorizada de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 3x4 - 3x3 - 21x^2 + 3x + 18$

b) $Q(x) = 5x4 - 125x^2 + 720$

ACTIVIDAD 50



Con un cuadrado de cartón cuyos lados miden 30 cm. queremos construir una caja abierta recortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados restantes. Si x es el lado del cuadrado que hay que recortar:

a) Encuentre una expresión que permita calcular el volumen de la caja, dependiendo de la longitud x del cuadrado que se recorta en cada esquina.

b) ¿Qué volumen tendrá la caja si se recortan cuadrados de 4 cm. de lado?

c) ¿Cuánto debe medir el lado del cuadrado a recortar para que el volumen de la caja sea exactamente de 1944 cm3?

Clave de corrección

Actividad 1

Los números naturales se usan siempre que haya que contar algo: personas, objetos, animales, días, meses, años, etc.
La suma y la multiplicación de números naturales es siempre un número natural. La potenciación de números naturales con exponente natural es siempre un número natural.
La resta y división y la radicación de naturales no siempre es un número natural

Actividad 2

Los números negativos se utilizan para indicar temperaturas bajo cero, altura bajo el nivel del mar, deudas, años antes de Cristo, etc.
La suma, la resta y la multiplicación de enteros es siempre un número entero. La potenciación de enteros con exponente natural es siempre un número entero.
La división y la radicación de enteros no siempre es un número entero.

Actividad 3

$\frac{1}{2}$; $-\frac{13}{9}$; $\frac{61}{137}$; 2; - 3; 0 ; 5/4; 3/8
0,5 - 1,4…. 0,444525547…. 2 -3 0 1,25
0,375

Actividad 4

Cuando se compra 1/ 2 Kg. de pan. Cuando se saca un boleto de colectivo de $1,25. Cuando se dice que una persona mide 1,70m, etc.
La suma, resta, multiplicación y división de racionales es siempre un número racional. La potenciación de números racionales con exponente natural es siempre racional
La radicación de números racionales no siempre es un número racional

Actividad 5

Para calcular la superficie de una figura circular.
Para calcular la diagonal de un cuadrado cuyos lados miden 1m

Actividad 6

Escriba la expresión algebraica que representa a cada uno de los siguientes enunciados

a) El doble de un número **a** **2a**
b) La tercera parte de un número **c** **1/3 c**
c) El cuadrado de un número **x** x^2
d) El anterior del cuadrado de un número **n** $n^2 - 1$
e) El cuadrado del siguiente de un número **d** $(d + 1)^2$

f) El producto de un número **a** por su siguiente **$a \cdot (a + 1)$**
g) La diferencia entre un número **c** y su consecutivo **$c - (c + 1)$**

Actividad 7

a) $m = p + 6$
b) $m = p \cdot 6$
c) $p - 6 = m$
d) $p = m + 6$
e) $p - m = 6$
f) $m - p = 6$

Actividad 8

a. $3b + 2c + 4d$
El triple de un número más el doble de otro número, más el cuádruplo de otro.

b. $x^2 = 9$
El cuadrado de un número es igual a nueve

c. $5x$
El quíntuplo de un número

d. $a^2 + b^2$
La suma de los cuadrados de dos números

e. $2^x = 8$
Dos elevado a un cierto número es igual a 8

f. $2(x + 1) = 4x$
El doble del siguiente de un número es igual al cuádruplo de dicho número

g. $3x + 2y = 5$
La suma del triple de un número más el doble de otro es igual a cinco

h. $S = b \cdot h / 2$
La superficie es igual a la mitad del producto entre la base y la altura

i. $4 = x + 1$
Cuatro es igual al siguiente de un número

j. $a+1 = a + 2$
El siguiente de un número es igual a dicho número aumentado en dos unidades

k. $2b = b + b$
El doble de un número es igual a la suma de dicho número con sí mismo.

Actividad 9

Una cada una de las afirmaciones siguientes con su correspondiente expresión algebraica.

a) El cuadrado de la suma de dos números **a** y **b**	$a^3 - b^3$
b) El triple del anterior de un número **c**	$3c - 1$
c) El cuadrado de un número **a** disminuido en **b** unidades	$(a - b)^3$
d) El anterior del triple de un número **c**	$(a + b)^2$
e) La diferencia entre los cubos de dos números **a** y **b**	$3(c - 1)$
f) El cubo de la diferencia de dos números **a** y **b**	$a^2 - b$

Actividad 10

a) $2a - 3b + 4(a - b) = 2a - 3b + 4a - 4b = 6a - 7b$

Se utilizó la propiedad distributiva y la propiedad conmutativa. Luego se sumaron los términos semejantes.

b) $2ab + 3(a - b) + 4b - 5ab = 2ab + 3a - 3b + 4b - 5ab = -3ab + 3a + b$

Se utilizó la propiedad distributiva y la propiedad conmutativa. Luego se sumaron los términos semejantes.

c) $x + x^2 - 3x + 4x^2 = -2x + 5x^2$

Se utilizó la propiedad conmutativa y se sumaron los términos semejantes.

d) $x + 2y - (x + y) = x + 2y - x - y = y$

Se utilizó la propiedad distributiva y la propiedad conmutativa. Luego se sumaron los términos semejantes.

Actividad 11

a) $3b \cdot 4a^4 \cdot 5ab^2 = 60a^5b^3$

b) $4x \cdot 2x^2 = 8x^3$

c) $5xy \cdot 4x^2y = 20x^3y^2$

d) $-3a \cdot 2ab \cdot (-3b^2) = -18a^2b^3$

Actividad 12

a) $x + 2x = 3x$
b) $x \cdot 2x = 2x^2$
c) $x \cdot x \cdot x \cdot x + 2x^2 \cdot X^2 + 5x \cdot x^3 = 8x^4$
d) $b + 2b + b^2 = 3b + b^2$
e) $4x(2 - 3x + x) = 8x - 8x^2$

Actividad 13

Escriba una ecuación que:

a) Tenga una sola solución $3x + 2 = 5$
b) Tenga dos soluciones $x^2 = 25$
c) No tenga solución $x + 2 = x + 3$
d) Sea equivalente a $3x - 2 = 10$ $2x + 1 = 9$
e) Cuyo conjunto solución sea $S = \{4\}$ $x + 1 = 5$

Actividades 14 y 15

Resueltas dentro del módulo.

Actividad 16

Ver módulo.

Actividad 17

a) $x + x + 2 + x + 4 + x + 6 = 104$ siendo x lo que aporta Martín
Martín 23, Pedro 25, Luis 27 y Juan 29

b) $0{,}10\,x + 0{,}25\,(23 - x) = 4{,}55$ siendo x la cantidad de monedas de 10 centavos
monedas de 10 centavos = 8
monedas de 25 centavos = 15

c) $600 + 12{,}5\,x = 1200$ siendo x la cantidad de afiliados
$x = 48$

Actividad 18

a. Simbólicamente representamos un número par cualquiera como 2n y un número impar cualquiera como 2m + 1. Su suma será:
$2n + 2m + 1$
Sacamos factor común 2 y podemos escribir
$2(n + m) + 1$
Como la suma de dos números enteros n y m es otro número entero al que podemos llamar k, reemplazando nos queda:
$2(n + m) + 1 = 2k + 1$ siendo $2k + 1$ la expresión correspondiente a un número impar.

b. Simbólicamente representamos un número par cualquiera como 2n y otro número par como 2m. Su producto será:
2n . 2 m
Aplicamos propiedad conmutativa del producto y obtenemos:
2 .2. n . m
Como 2. n. m es un número entero pues el producto de números enteros es otro número entero, llamando k al resultado de 2. n. m , podemos escribir
2. 2. n. m = 2. k , siendo 2k la expresión correspondiente a un número par.

c. Simbólicamente representamos un número impar cualquiera como 2n + 1 y otro número impar como 2m + 1. Su producto será:
(2n + 1) . (2m + 1)
Aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y obtenemos
2n.2m + 2n + 2m + 1
Sacamos factor común 2 y podemos escribir:
2 (2 n m + n + m) + 1
Como el paréntesis corresponde a la expresión de un número entero por ser el producto y la suma de enteros otro número entero, llamamos k al resultado del paréntesis y escribimos:
2 (2 n m + n + m) + 1 = 2 k + 1 , siendo 2k + 1 la expresión correspondiente a un número impar.

d. Simbólicamente representamos un número par cualquiera como 2n y un número impar cualquiera como 2m + 1. Su producto será:
2n . (2m + 1)
Aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y obtenemos:
2n.2m + 2n
Sacamos factor común 2 y podemos escribir
2 (2 n m + 1)
Como el paréntesis es un número entero, llamamos k al resultado de ese paréntesis y escribimos:
2 (2 n m + 1) = 2k, siendo 2k la expresión correspondiente a un número par.

Actividad 19

El valor que ocupará el décimo lugar en cada una de las siguientes sucesiones será:
a) 2, 5, 10, 17, 26, ... cada número de la sucesión se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa y sumándole 1. Para calcular el décimo número la operación es $10^2 + 1 = 101$ en general: $n^2 + 1$
b) 2, 5, 8, 11, 14, ... cada número de la sucesión se obtiene mediante la siguiente expresión: 3n – 1 El décimo valor será 3.10 – 1 = 29

Actividad 20

- **a)** $n \leq 4$
- **b)** $- 2 < x < 5$
- **c)** $4 c \leq 15$

d) $p \leq j$
e) $m \geq 2 L$
f) $n \leq m$

Actividad 21

Indique cuál o cuáles de los siguientes valores de x pueden ser solución de la siguiente inecuación:

$$3 (x – 1) + 2 > 5 x – 2$$

a) $x = 0$ b) $x = - 2$ c) $x = 2$ d) $x = 1/2$

Se reemplazan los valores propuestos en la inecuación y se eligen los que verifican la desigualdad o se resuelve la inecuación y se eligen los valores que pertenecen al conjunto solución.

Si $x = 0$
$3 (0 – 1) + 2 > 5. 0 – 2$
$3. (- 1) + 2 > 0 – 2$
$- 3 + 2 > - 2$
$-1 > - 2$ verdadero, luego $x = 0$ es una solución

Si $x = -2$
$3 (-2 – 1) + 2 > 5. (- 2) – 2$
$3. (- 3) + 2 > - 10 – 2$
$- 9 + 2 > - 12$
$-7 > - 12$ verdadero, luego $x = - 2$ es una solución

Si $x = 2$
$3 (2 – 1) + 2 > 5. 2 – 2$
$3. (1) + 2 > 10 – 2$
$3 + 2 > 8$
$5 > 8$ falso, luego $x = 2$ no es una solución

Si $x = 1/2$
$3 (1/2 – 1) + 2 > 5. 1/2 – 2$
$3. (- 1/2) + 2 > 5/2 – 2$
$- 3/2 + 2 > 1/2$
$1/2 > 1/2$ falso, luego $x = 1/2$ no es una solución

Otra forma es resolver la inecuación, pero en esta parte del módulo todavía no se vio resolución de inecuaciones,.

$3 (x – 1) + 2 > 5 x – 2$

$3x – 3 + 2 > 5 x – 2$

$3 x – 5 x > - 2 +3 - 2$

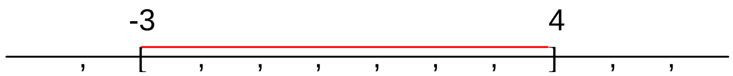
$- 2 x > - 1$

x $< 1/2$ El conjunto solución está formado por todos los números menores que 1/2 . Por lo tanto de los valores propuestos, los que cumplen con esta condición son el 0 y el -2

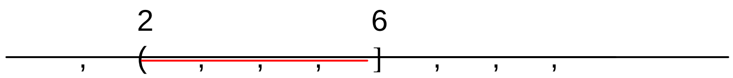
Actividad 22

Las inecuaciones expresadas como intervalos de números reales y representados en la recta numérica resultan:

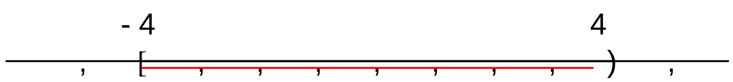
a) $-3 \leq x \leq 4$ $[-3 ; 4]$



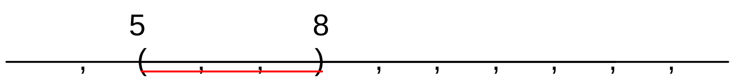
b) $2 < x \leq 6$ $(2 ; 6]$



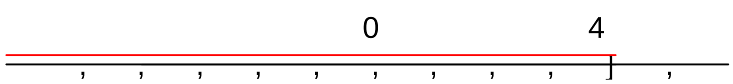
c) $-4 \leq x < 4$ $[-4 ; 4)$



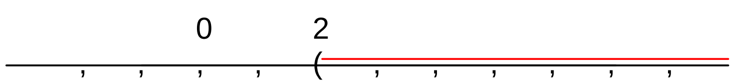
d) $5 < x < 8$ $(5 ; 8)$



e) $x \leq 4$ $(-\infty ; 4]$



f) $x > 2$ $(2 ; +\infty)$



Actividad 23

La desigualdad se mantiene en todos los casos menos el f y el h

Conclusión: si se multiplican o dividen ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad

Actividad 24

$33 + 0{,}045\,x \leq 50$ siendo x la cantidad de minutos

$0{,}045\,x \leq 50 - 33$
$0{,}045\,x \leq 17$
$x \leq 17 : 0{,}045$
$x \leq 377{,}77$

La persona no debe hablar más de 377 minutos.

Actividad 25

$2x + 29 \leq 50$ siendo x el precio de cada remera

Cada remera no puede costar más que $ 10,50

Actividad 26

Encuentre tres soluciones enteras para cada una de las siguientes inecuaciones

a) $3x - 2x + 2 < 2\,(x - 1)$

$x + 2 < 2\,x - 2$
$x - 2\,x < -2 - 2$
$-x < -4$

$x > 4$

Cualquier número entero mayor que 4, por ejemplo 5, 6 y 7

b) $5x - 3 \geq 2x - (x + 3)$

$5\,x - 3 \geq 2x - x - 3$
$5\,x - 3 \geq x - 3$
$5\,x - x \geq -3 + 3$
$4\,x \geq 0$
$x \geq 0$

Cualquier número entero mayor o igual que cero, por ejemplo: 0, 1 y 2

Actividad 27

a) $x < 1$ $S = (-\infty ; 1\,]$

b) $x \geq -2$ $S = [\,-2 ; \infty)$

Actividad 28

a) J = M + 10
Algunas posibles soluciones son (160, 170) ; (165,175); (171,181)
Son infinitas

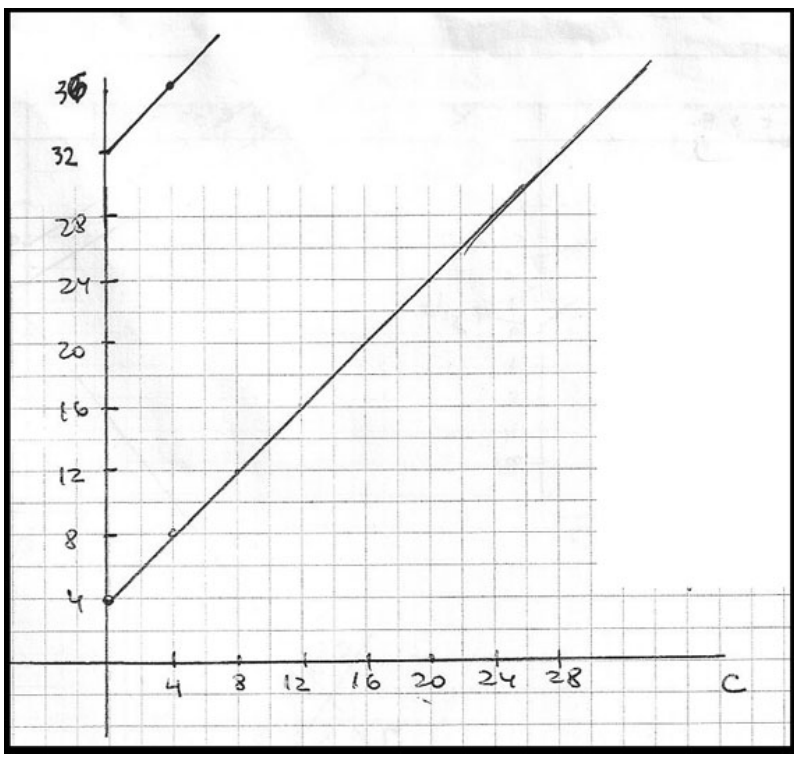
b) 2n + 3 p = 36
Algunas soluciones (3,10); (6,8); (9,6) son finitas

c) P + M = 100
Algunas soluciones son (52,20; 47,80); (90; 10); (25; 75)(12,50; 87,50) son infinitas

d) a – b = 14
Algunas soluciones son (1, 15); (-3; 11); (0,5; 14,5) ; (2/3; 44/3) son infinitas

Actividad 29

El sistema a resolver es v = c + 4
v + c = 32



Actividad 30

a) el sistema a resolver es $a + b = 90$
$a = 3b$

Reemplazando en la primera expresión **a** por **3b** obtenemos

$3b + b = 90$
$4b = 90$
$b = 90/4 = 22,5$

Por lo tanto $a = 90 – b = 90 – 22,5 = 67,5$
Como se trata de ángulos uno de ellos medirá 22°30 ' y el otro medirá 67°30'

b) el sistema a resolver es $0,10\ x + 0,25\ y = 30$
$x + y = 150$

Despejando de la segunda ecuación

$y = 150 – x$

Reemplazando en la primera

$0,10\ x + 0,25\ (150 – x) = 30$

Operando

$0,10\ x + 37,5 – 0,25\ x = 30$

$- 0,15\ x = 30 – 37,5$

$- 0,15\ x = - 7,5$

$x = - 7,5 : (- 0,15)$

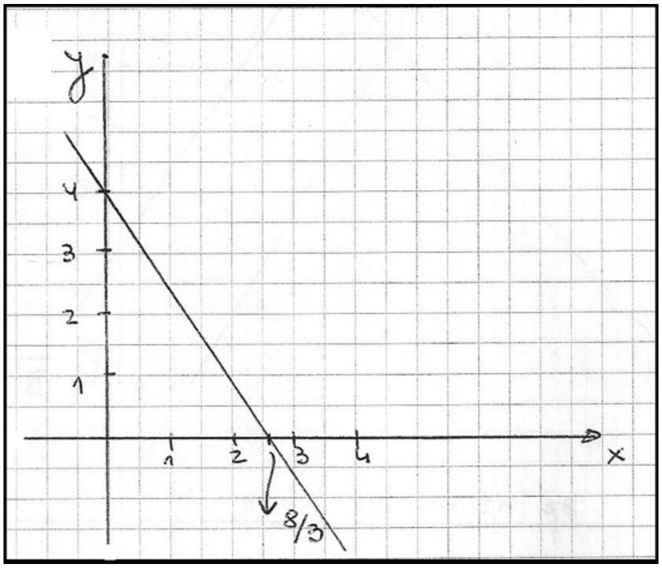
$x = 50$

Luego $y = 150 – x = 150 – 50 = 100$

Actividad 31

a)

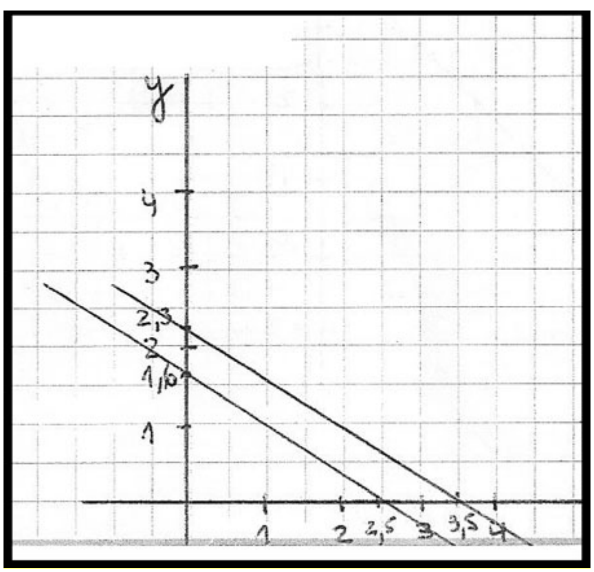
$$\begin{cases} 3\ x + 2\ y = 8 \\ 6\ x + 4\ y = 16 \end{cases}$$



Sistema compatible indeterminado. S = R

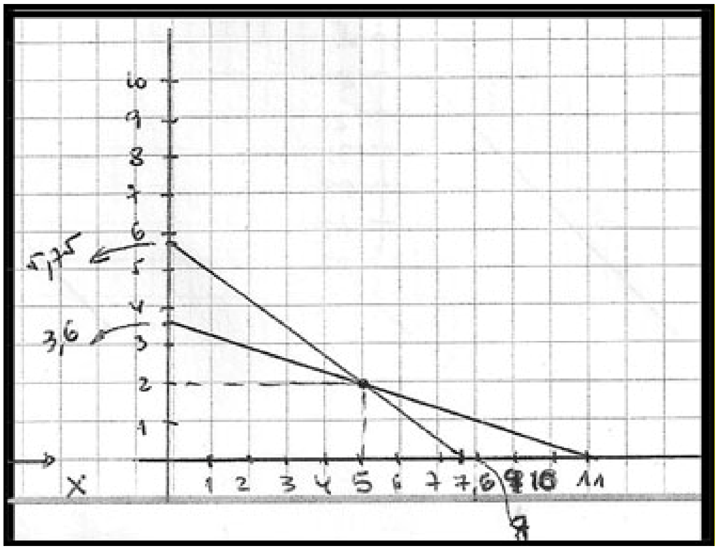
b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$

Sistema incompatible S = Ø



c) $\begin{cases} 3x + 4y = 23 \\ 2x + 6y = 22 \end{cases}$

Sistema compatible determinado S = { (5 ; 2)}



Actividad 32

El sistema a resolver es:

x + y = 100
0,5 x + 0,25 y = 35

Donde **x** representa la cantidad de monedas de 50 centavos e **y** la cantidad de monedas de 25 centavos

La respuesta es: 40 monedas de 50 centavos y 60 monedas de 25 centavos
El sistema es compatible determinado

Actividad 33

El sistema a resolver es:

x = y
2x + 5 y = 100

Como **x** e **y** representan la cantidad de billetes de cada clase y la solución del sistema no es un par de números naturales la respuesta es que no es posible.
El sistema es compatible determinado

Actividad 34

Las expresiones correspondientes a cada empresa son:
Empresa A: y = 2,5 x + 15
Empresa B: y = 3,25 x

a) Reemplazando en cada una de las expresiones anteriores **x** por 10 se obtiene:

Empresa A: 40

Empresa B: 32,5
Por lo tanto conviene la empresa **B**

b) Debemos resolver el sistema:
$y = 2,5\,x + 15$
$y = 3,25\,x$
Igualamos $2,5\,x + 15 = 3,25\,x$
Despejando obtenemos $x = 20$
Respuesta: hay que comprar 20 m^2

Actividad 35

Hay que resolver el sistema:

$2J + 4F = 60$
$J + 2F = 30$

El sistema resulta indeterminado. Por lo tanto tiene infinitas soluciones.
El conjunto solución es S = R. Entonces no es suficiente la información.

Actividad 36

Según Marcela el sistema a resolver es:

$E + M = 200$
$M = E + 50$
$E – 20 = M / 2$

Según Esteban el sistema a resolver es:

$E + M = 200$
$M = E + 50$
$E – 12,5 = M / 2$

En ambos sistemas las dos primeras ecuaciones son iguales. Trabajando con ellas obtenemos E = 75 , M = 125
Reemplazando estos valores en la tercera ecuación de cada uno de los sistemas vemos que la igualdad se verifica en el caso de Esteban
Por lo tanto Esteban tiene razón.

Actividad 37

Grado del polinomio	Coeficiente	Termino independiente
a) $n = 5$	$a_n = -2$	$a_0 = -2$
b) $n = 4$	$a_n = 3$	$a_0 = 3$
c) $n = 1$	$a_n = 5$	$a_0 = -2$
d) $n = 2$	$a_n = 3$	$a_0 = 0$
e) $n = 0$	$a_n = 5$	$a_0 = 5$

Actividad 38

a) $P(2) = -3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3 = -1$ $P(x) = -3(-1)^2 + 4(-1) + 3 = -4$

b) $Q(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 = -4$ $Q(x) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 2(-1) = 2$

c) $R(2) = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 - 2 = -8$ $R(x) = 5(-1) - 4(-1)^2 - 2 = -11$

Actividad 39

a) $P(x) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 9 = 0$ sí es raíz porque al reemplazar la x por 3 el valor numérico del polinomio es igual a cero

b) $Q(x) = -3^4 - 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 + 1 = 125$ no es raíz porque al reemplazar la x por 3 el valor numérico del polinomio es distinto de cero

c) $R(x) = 5 \cdot 3 - 15 = 0$ sí es raíz porque al reemplazar la x por 3 el valor numérico del polinomio es igual a cero

d) $T(x) = 3 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 = 72$ no es raíz porque al reemplazar la x por 3 el valor numérico del polinomio es distinto de cero.

Actividad 40

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2$ grado 3

$Q(x) = 5x^2 + 3x - 1$ grado 2

$M(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 4$ grado 3

$R(x) = 2x^3 + 9x^2 + 3x + 1$ grado 3

$S(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 3$ grado 3

$N(x) = 10x^2 - 3x + 6$ grado 2

$T(x) = 10x^5 + 14x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 6x - 2$ grado 5

Actividad 41

a) $A(x) : B(x) = 3x + 10$ resto $35x - 21$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -2x^2 & +x & -1 & x^2 - 4x + 2 \\
-\ 3x^3 & -12x^2 & +6x & & \overline{3x + 10} \\
\hline
 & 10x^2 & -5x & -1 & \\
 & -\ -10x^2 & -40x & +20 & \\
\hline
 & & 35x & -21 &
\end{array}
$$

b) A (x) : C (x) = $x^2 + x + 2$ resto 9

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -2x^2 & +x & -1 & 3x-5 \\ \cline{5-5}
-\;3x^3 & -5x^2 & & & x^2+x+2 \\ \cline{1-2}
 & 3x^2 & +x & -1 & \\
 & -\;3x^2 & -5x & & \\ \cline{2-4}
 & & 6x & -1 & \\
 & & -\;6x & -10 & \\ \cline{3-4}
 & & & 9 &
\end{array}
$$

El grado de R (x) es siempre menor que el grado de B (x)

Actividad 42

a)

	1	4	-1	→ Coeficientes del polinomio dado
		+	+	
a = 1		1	5	
	1	5	4	→ Resto

$\underbrace{1 \quad 5}_{\text{Coeficientes de C (x)}}$

P (x) = $x^2 + 4x - 1$
P (1) = $1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 4$

Cociente: x + 5 Resto 4 P (1) = 4

b)

	2	0	-3	2	-6	→ Coeficientes del polinomio dado
		+	+	+	+	
a = -3		-6	18	-45	129	
	2	-6	15	-43	123	→ Resto

Coeficientes de C (x)

$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x - 6$
$P(-3) = 2(-3)^4 - 3 \cdot (-3)^2 + 2(-3) - 6 = 123$

Cociente $2x^3 - 6x^2 + 15x - 43$ resto 123 $P(-3) = 123$

c) El resto de la división de un polinomio por otro de la forma **x – a** coincide con el valor numérico del polinomio para **x = a**

Actividad 43

Aplicando el teorema del resto reemplazamos **x** por -4 en el polinomio dado y obtenemos el resto de la división.
$P(-4) = 4(-4)^3 + 5(-4)^2 - 2(-4) + 1 = -167$
Aplicando el teorema del resto reemplazamos **x** por 2 en el polinomio dado y obtenemos el resto de la división.
$P(2) = 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 49$

Actividad 44

Si P(x) divisible por Q (x) el resto de la división debe ser 0, por lo tanto los valores numéricos de P (x) para x = 1, en el caso a y para x = -3 en el caso b deben ser 0

a) $P(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1^3 - m = 0$
$1 + 2 + 4 - m = 0$
$7 - m = 0$
$m = 7$

b) $P(-3) = 4(-3)^3 - 2(-3) + 3m = 0$
$4 \cdot (-27) + 6 + 3m = 0$
$-108 + 6 + 3m = 0$
$-102 + 3m = 0$
$3m = 102$
$m = 102 / 3$
$m = 34$

Actividad 45

Un polinomio es divisible por otro si el resto de la división es igual a cero. Aplicamos el teorema del resto para calculamos el resto de la división.

$P(-1) = 3(-1)^4 - 2(-1)^3 + 2(-1) - 3 = 0$ sí porque el resto es igual a cero
$P(3) = 3 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 - 3 = 192$ no porque el resto es distinto de cero

$P(1) = 3 . 1^4 - 2 . \ 1^3 + 2 . \ 1 - 3 = 0$ sí porque el resto es igual a cero

$P(-2) = 3(-2)^4 - 2(-2)^3 + 2(-2) - 3 = 57$ no porque el resto es distinto de cero

Actividad 46

Hallamos los valores numéricos de **P(x)** para los distintos valores de **x** y las raíces corresponden a aquellos valores para los cuales el valor numérico es cero.

$P(1) = 1^3 - 3 .1^2 - 10 .1 + 24 = 12$
$P(2) = 2^3 - 3 .2^2 - 10. 2 + 24 = 0$
$P(3) = 3^3 - 3 .3^2 - 10 . 3 + 24 = -6$
$P(4) = 4^3 - 3 .4^2 - 10 . 4 + 24 = 0$
$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 10(-1) + 24 = 30$
$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 10(-2) + 24 = 24$
$P(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 10(-3) + 24 = 0$

Las raíces son $x = 2$ $x = 4$ $x = -3$

Actividad 47

Para responder la primera parte debemos hallar el vértice de la parábola. Utilizando las fórmulas correspondientes y reemplazando a por -1, b por 30 y c por 30.000 obtenemos

$xv = -b / 2a = -30 / 2(-1) = 15$

$yv = f(vx) = -15^2 + 30 . 15 + 30.000 = -225 + 450 + 30.000 = 30.225$

La respuesta al problema es: puede plantar 15 árboles por encima de 50 por hectárea y la producción máxima será de 30.225

Para averiguar a partir de qué valor la producción se hace cero hay que hallar las raíces del polinomio utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando a, b y c por sus respectivos valores se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4.(-1).30.000}}{2.(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 120.000}}{2.(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{120.900}}{2.(-1)}$$

$$x_1 = \frac{-30 + 347{,}71}{-2} = -158{,}85$$

$$x_2 = \frac{-30 - 347{,}71}{-2} = 188{,}85$$

$x_1 = -\ 158{,}85$ y $x_2 = 188{,}85$

Como **x** representa la cantidad de árboles, debemos aproximar los resultados y descartar el resultado negativo. Por lo tanto la respuesta al problema será que a partir de 189 árboles por encima de 50 la producción es igual a cero.

Actividad 48

Para responder la primera parte debemos hallar el vértice de la parábola. Utilizando las fórmulas correspondientes y reemplazando a por -1, b por 21 y c por 100 obtenemos

$xv = -b / 2a = -21 / 2(-1) = 10{,}5$

$yv = f(vx) = -10{,}5^2 + 21 . 10{,}5 + 100 = -110{,}25 + 220{,}5 + 100 = 210{,}25$

La respuesta al problema es: 10 años y medio después de ser introducidos, la población era máxima. A partir de ese momento comenzó a disminuir. La cantidad máxima de ciervos que llegó a haber en la isla fue de 210 (debemos tomar la parte entera del número pues no podemos contar ciervos con números decimales)

Para averiguar en qué momento se extingue la población hay que hallar las raíces del polinomio utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando a, b y c por sus respectivos valores se obtiene:
$x_1 = 25$ y $x_2 = -4$

Descartamos el resultado negativo pues nuestra función tiene como dominio los números positivos. La respuesta entonces es que los ciervos se extinguieron 25 años luego de ser introducidos en la isla.

Actividad 49

Para escribir la forma factorizada primero hallamos todas las raíces del polinomio siguiendo los pasos que se indican en el módulo y luego reemplazamos estos valores en la fórmula $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ donde **a** es el coeficiente principal y x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces halladas.

a) $P(x) = 3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18$

Primero buscamos, tanteando, una raíz. Probamos de reemplazar **x** por distintos valores hasta encontrar uno que haga que la cuenta dé cero. Por ejemplo

Si $x = 1$ $\quad P(1) = 3 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 21 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 18 = 0$

Ahora debemos dividir $P(x) = 3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18$ por $x - 1$

Aplicamos la regla de Ruffini

	3	-3	-21	3	18	→ Coeficientes de P (x)
		+	+	+		
Raíz = 1		3	0	-21	-18	
	3	0	-21	-18	0	→ Resto

Coeficientes del cociente

Con lo cual podemos escribir:

$$3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18 = (x - 1)(3x^3 - 21x - 18) \qquad \textbf{(1)}$$

Ahora debemos encontrar las raíces de $(3x^3 - 21x - 18)$.

Como se trata de un polinomio de tercer grado debemos encontrar otra raíz por tanteo.
Por ejemplo

Si $x = -1$ $\quad 3(-1)^3 - 21(-1) - 18 = 0$

Dividimos $3x^3 - 21x - 18$ por $x + 1$

	3	0	-21	- 18
		+	+	+
-1		- 3	3	18
	3	- 3	- 18	0

Reemplazando en **(1)**

$3x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 3x + 18 = (x - 1)(x + 1)(3x^2 - 3x - 18)$

Ahora debemos factorizar $3x^2 - 3x - 18$

Como es un polinomio de grado 2 aplicamos la fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 3$, $b = -3$ y $c = -18$ y obtenemos

$x_1 = -2$ y $x_2 = 3$

Reemplazando en la forma factorizada
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, la expresión del polinomio factorizado será:
$P(x) = 3(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 3)$

b) $Q(x) = 5x^4 - 125x^2 + 720$
Siguiendo los mismos pasos que en el caso a) obtenemos la forma factorizada de $Q(x) = 5(x - 4)(x + 4)(x + 3)(x - 3)$

Actividad 50

- **a)** la expresión que permite calcular el volumen es $V(x) = x(30 - 2x)^2$
- **b)** $V(4) = 4(30 - 2 \cdot 4)^2 = 1936$
- **c)** $V(x) = x(30 - 2x)^2 = 1944$

  $V(x) = x(30 - 2x)(30 - 2x) = 1944$

Aplicando propiedad distributiva y agrupando:

$4x^3 - 120x^2 + 900x - 1944 = 0$

Como se trata de un polinomio de grado 3 debemos encontrar una raíz por tanteo.

Probamos de reemplazar **x** por distintos valores hasta encontrar uno que haga que la cuenta dé cero. Por ejemplo:

Si $x = 6$ $\quad 4 . 6^3 - 120 . 6^2 + 900 . 6 – 1944 = 864 – 4320 + 5400 - 1944 = 0$

Por lo tanto si el lado del cuadrado recortado es de 6 cm el volumen de la caja es de 1944 cm^3

AUTOEVALUACION

Ejercicio No. 1:
Un examen consta de 20 preguntas. Cada pregunta bien contestada vale 0,5 puntos y cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos. Si no contesta alguna pregunta no suma ni resta puntos. Un alumno no contestó 2 preguntas y obtuvo un cuatro. ¿Cuántas preguntas contestó correctamente?

Ejercicio No. 2:
Ruben es dueño de una librería. Encarga resmas de papel a un mayorista que le cobra $ 9 cada resma más un adicional de $6 en concepto de flete. ¿Cuántas resmas puede encargar si quiere pagar, a lo sumo, $ 100 en total?

Ejercicio No. 3:
Juan es panadero. Necesita comparar harina. Consigue una parte de los paquetes de harina en oferta a $1,5 cada uno, pero no le alcanza y decide comprar la otra parte en paquetes que cuestan $1,8 cada uno. Gasta en total $40,5. Los paquetes que consiguió en oferta son 5 más que los otros. ¿Cuántos paquetes de cada clase compró?

Ejercicio No. 4:
La velocidad v (en m/s) de un misil t segundos después de haber sido lanzado está dada por la siguiente fórmula: $v(t) = -t^2 + 18t + 40$

- **a)** ¿Cuál es la velocidad máxima alcanzada por el misil?
- **b)** ¿Cuántos segundos después de haber sido lanzado alcanza la velocidad máxima?
- **c)** ¿Luego de cuántos segundos se detiene la misil?
- **d)** ¿En qué momento la velocidad del misil fue de 100 m/s?
- **e)** ¿En qué momento la velocidad del misil fue de 150 m/s?

Ejercicio No. 5:
En un laboratorio se toma la temperatura de una cierta sustancia a partir de las 8 de la mañana. Se obtiene la siguiente fórmula que permite calcular la temperatura, en grados, de esa sustancia en función del tiempo a partir del cual se comenzaron a realizar las mediciones:
$T(t) = 0,2\,t^3 - 5,6\,t^2 + 36\,t$.

a) ¿cuál fue la temperatura a las 5 horas de haber comenzado las mediciones?
b) ¿A qué hora la temperatura era de 0º C?
c) ¿Hubo algún momento en el cual la temperatura era bajo cero?

Claves de corrección de la autoevaluación

Ejercicio No. 1:

Llamando x a las preguntas bien contestadas y que teniendo en cuenta que no contestó dos preguntas, las preguntas mal contestadas serán 18 – x
Para calcular el puntaje que obtiene por las preguntas bien contestadas debemos multiplicar x por 0,5 que es lo que vale cada pregunta.
Para calcular lo que le descontarán debemos multiplicar el total de preguntas mal contestadas, o sea x – 18, por 0,5. Sumando los puntajes debemos obtener 4

Por lo tanto, la ecuación que permite averiguar el total de preguntas bien contestadas será:

$0,5\,x - 0,5\,(18 - x) = 4$

distribuyendo obtenemos

$0,5\,x - 9 + 0,5\,x = 4$

Despejando
$0,5\,x + 0,5\,x = 4 + 9$

$x = 13$

Respuesta: contestó bien 13 preguntas.

Ejercicio No. 2:

La inecuación que permite resolver el problema es:

$9\,x + 6 \leq 100$

$9x \leq 100 - 6$

$9x \leq 94$

$x \leq 94 : 6$

$x \leq 15,6$

Respuesta: puede encargar a lo sumo 15 resmas.

Ejercicio No. 3:

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 1,5\,x + 1,8\,y = 40,5 \\ x = y + 5 \end{cases}$$

reemplazando la segunda ecuación en la primera obtenemos:

$1,5\,(y + 5) + 1,8\,y = 40,5$

Distribuyendo
$1,5\,y + 7,5 + 1,8\,y = 40,5$

Despejando

$1,5\,y + 1,8\,y = 40,5 – 7,5$

Agrupando

$3,3\,y = 33$

$y = 33 : 3,3$
$y = 10$

Por lo tanto $x = y + 5 = 10 + 5 = 15$

Respuesta: compró 15 paquetes en oferta y 10 de los otros.

Ejercicio No. 4:

Para responder las dos primeras preguntas debemos hallar el vértice de la parábola, donde xv será el momento en el que alcanza la velocidad máxima e yv será la velocidad máxima.
Utilizando las fórmulas correspondientes y reemplazando a por -1, b por 18 y c por 40 obtenemos

$xv = - b / 2a = -18 / 2 (- 1) = 9$
Luego podemos responder al punto b) diciendo que la el misil alcanza su máxima velocidad 9 segundos después de haber sido lanzado

$yv = f (vx) = - 9^2 + 18 \cdot 9 + 40 = - 81 + 162 + 40 = 121$

a) La respuesta es: la máxima velocidad alcanzada es de 121m/s

Para averiguar en qué momento se detien el misil debemos calcular las raíces del polinomio utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando a, b y c por sus respectivos valores se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4.(-1).\,40}}{2.(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 160}}{2.(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{484}}{2.(-1)}$$

$$x_1 = \frac{-18 + 22}{-2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-18 - 22}{-2} = 20$$

$x_1 = -2$ y $x_2 = 20$

El momento en el cual el misil fue lanzado corresponde a tiempo cero, por lo tanto debemos descartar el valor negativo.

c) La respuesta es: el misil se detiene a los 20 segundos.

Para responder el punto d debemos reemplazar v por 100 y resolver la ecuación
$100 = -t^2 + 18t + 40$

Despejando

$0 = -t^2 + 18t + 40 - 100$
$0 = -t^2 + 18t - 60$

utilizando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde a = -1, b = 18 y c = - 60 se obtiene

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4.(-1).(-60)}}{2.(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 240}}{2.(-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{84}}{2.(-1)}$$

$$x_1 = \frac{-18 + 9{,}16}{-2} = 4{,}42$$

$$x_2 = \frac{-18 - 9{,}16}{-2} = 13{,}58$$

$x_1 = 4{,}42$ y $x_2 = 13{,}58$

d) El misil tendrá una velocidad de 100m/s a los 4,42 s y a los 13,58 s
e) Teniendo en cuenta que la velocidad máxima es de 121m/s podemos decir que el misil nunca alcanzará una velocidad de 150 m /s

Ejercicio No. 5:

a) Para responder este punto debemos reemplazar t por 5 y hacer el cálculo.

$$\begin{aligned} T(5) &= 0{,}2 \,.\, 5^3 - 5{,}6.\ 5^2 + 36.\ 5 \\ &= 0{,}2 \,.\, 125 - 5{,}6 \,.\, 25 + 36 \,.\, 5 \\ &= 25 - 140 + 180 \\ &= 65 \end{aligned}$$

Para responder los puntos b y c debemos calcular las raíces del polinomio.

$T(t) = 0{,}2\ t^3 - 5{,}6\ t^2 + 36\ t.$

Para ello igualamos el polinomio a cero y resolvemos la ecuación.

$0 = 0{,}2\ t^3 – 5{,}6\ t^2 + 36\ t.$

Sacando factor común t

$0 = t\ (0{,}2\ t^2 – 5{,}6\ t + 36)$

Para que este producto sea cero, o t debe valer cero o el paréntesis debe valer cero, por lo tanto igualamos a cero el paréntesis y resolvemos la ecuación.

$0 = 0{,}2\ t^2 – 5{,}6\ t + 36$

Para ello aplicamos la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}}{2\ a}$$

donde a = 0,2 , b = -5,6 y c = 36

$$x_{1,2} = \frac{5{,}6 \pm \sqrt{5{,}6^2 - 4.\ 0{,}2.\ 36}}{2.\ 0{,}2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5{,}6 \pm \sqrt{31{,}36 – 28{,}8}}{2.\ 0{,}2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5{,}6 \pm \sqrt{2{,}56}}{2.\ 0{,}2}$$

$$x_1 = \frac{5{,}6 + 1{,}6}{0{,}4} = 18$$

$$x_2 = \frac{5{,}6 - 1{,}6}{0{,}4} = 10$$

$x_1 = 18$ y $x_2 = 10$

Las raíces de la función son t = 0, t = 10 y t = 18

b) Como la primera medición se realizó a las 8 de la mañana y ese momento corresponde a t = 0 podemos decir que la temperatura fue de 0 º C a las 8 de la mañana, 10 horas después de la 8, o sea a las 6 de la tarde y 18 horas después de las 8, o sea a las 2 de la mañana del día siguiente.

c) Teniendo en cuenta que las raíces de la función son $t = 0$, $t = 10$ y $t = 18$ y que las raíces son los puntos donde la función corta al eje x, si a las 5 horas de haber realizado la primera medición la temperatura era positiva, entre las 10 y las 18 horas de haber comenzado las mediciones, la temperatura será bajo cero.

Bibliografía

A continuación le proponemos algunos textos para consultar que, seguramente le serán útiles a lo largo de su trabajo con el Módulo. Recurra a su docente tutor o al bibliotecario de la escuela o de la biblioteca más cercana para que lo ayude en la búsqueda del material que le interese.

- Altman, S, Comparatore, C y Kurzrok, L.. *Matemática Polimodal. Funciones 1*,Argentina, Longseller, 2002.

- Altman, S, Comparatore, C y Kurzrok, L.. *Matemática Polimodal. Funciones 2*,Argentina, Longseller, 2002.

- Camus, N y Massara, L. *Matemática 3*, Argentina, AIQUE, 1994.